GRUPO DOCENTE PERÚ

SOLUCIONARIO

MATEMÁTICA

PREPARACIÓN

EXAMEN DE ASCENSO 2023

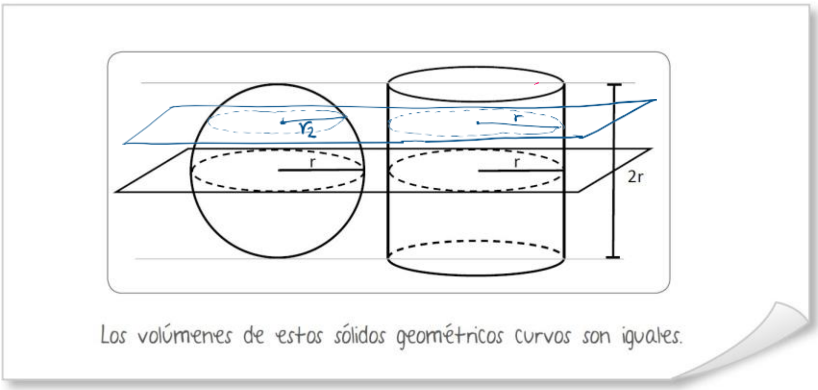
Tema: Problemas complementarios de Geometría

1. Un docente tiene como propósito que sus estudiantes comprendan cuándo dos sólidos geométricos tienen volúmenes iguales. Para ello, les presenta el siguiente principio:

    Si dos o más cuerpos tienen la misma altura y, además, tienen igual área en cualquiera de sus secciones planas tomadas a una misma altura, entonces, poseen igual volumen.

    Luego, el docente solicita a los estudiantes que, en equipos, grafiquen algunos casos en los que se cumpla este principio.

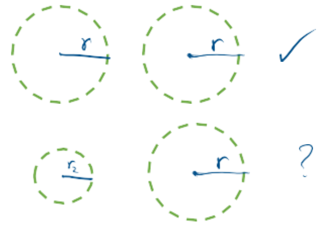
    Uno de los equipos presentó el siguiente gráfico:



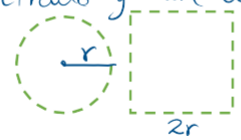
Los volúmenes de estos sólidos geométricos curvos son iguales.

Principio de Cavalieri.

Corte horizontal paralelo al plano de la base, permite obtener dos secciones circulares:



Corte vertical, perpendicular al plano de la base, permite observar un círculo y un cuadrado.



Considerando el error en el que incurrieron al interpretar el principio, ¿por qué los estudiantes de este equipo concluyen que los volúmenes de ambos sólidos son iguales?

a) Porque consideran que es suficiente con que, en los sólidos, las áreas de sus regiones circulares, tomadas a una misma altura, al menos en un caso, sean iguales.

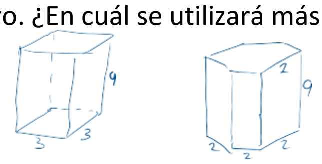
b) Porque consideran que es suficiente con que los sólidos tengan superficie curva y que las áreas de sus regiones circulares máximas sean iguales.

c) Porque consideran que es suficiente con que el plano horizontal que corta a los sólidos transversalmente determine regiones circulares.

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 2, 3 y 4.

Durante una clase, los estudiantes comentan acerca del aumento de la cantidad de personas que consumen a diario agua purificada. Este aumento conlleva una creciente fabricación de botellas de plástico. Al respecto, ellos han leído un artículo que señala que la descomposición de envases de cartón genera 80 % menos gases de efecto invernadero que la descomposición de botellas de plástico. Por este motivo, a los estudiantes les parece una excelente idea emprender un negocio de venta de agua utilizando envases hechos a base de cartón.

2. En el contexto de una exploración de opciones para la utilización de envases hechos a base de cartón, el docente decide proponer diversas tareas.
¿Cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?
   a) ¿Cuánto será el volumen de un envase cilíndrico hecho con cartón si el radio de su base mide $3\sqrt{3}$ cm y su altura mide 10,80 cm? Aplicación de fórmula: operativo.
   b) ¿En qué porcentaje disminuirá el volumen de un envase cilíndrico hecho con cartón si el radio de su base disminuye hasta la mitad de la longitud inicial y se mantiene constante su altura?
   c) Se proyecta elaborar dos tipos de envase que tengan forma de prisma recto y una altura de 9 cm: uno con una base cuadrada de 9 cm^2 de área y otro con una base hexagonal regular de 12 cm de perímetro. ¿En cuál se utilizará más cartón?



Aplicación de fórmula

3. Uno de los estudiantes diseña un envase de forma cilíndrica. Él afirma que si se duplicara la longitud del radio de la base y se mantuviera la misma altura, el cilindro resultante tendría el doble de volumen que el cilindro original.

Cilindro original: $V_1 = \pi r^2 . h$

Cilindro modificado: $V_2 = \pi (2r)^2 h$
$= 4 \pi r^2 h$

Ante esta intervención, el docente busca orientar la reflexión del estudiante acerca de su error. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para ello?
   a) Preguntarle lo siguiente: ¿qué forma geométrica tiene el envase?, ¿cuáles son los elementos de esta forma geométrica?, ¿qué sucede con el radio de la base?, ¿cómo se determina el volumen de un cilindro? Luego, señalar que, si se duplica solo el radio, el nuevo volumen no se duplica, sino que se cuadruplica.
   b) Entregarle un desarrollo plano para que forme un cilindro. Además, pedirle que señale los elementos del mismo, como altura, radio, base, generatriz, etc. Luego, comentarle que si el radio de la base tuviera el doble de longitud y la altura se mantuviera, el volumen del nuevo cilindro no sería el doble del volumen del cilindro construido con el desarrollo plano entregado.
   c) Solicitarle que revise qué elementos debe considerar para calcular el volumen de un envase cilíndrico. Luego, indicarle que exprese el volumen del cilindro en función del radio y la altura, y lo compare con el nuevo volumen cuando la longitud del radio se duplica y la longitud de la altura es la misma. Después, preguntarle si el nuevo volumen es el doble del volumen inicial.

4. El docente propone a los estudiantes realizar la siguiente secuencia de acciones:

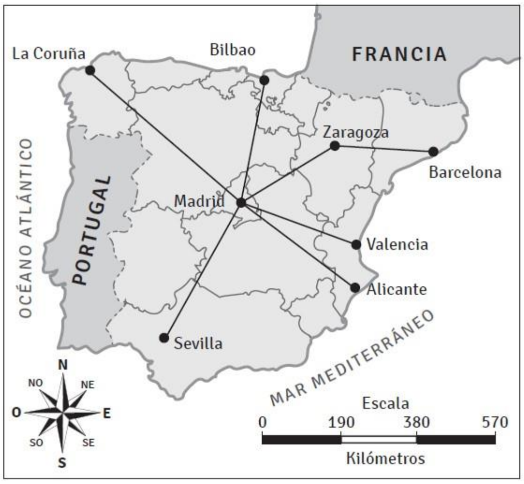
1. Conformar grupos de cuatro integrantes
2. Calcular la cantidad de cartón que se utilizaría en el área lateral de un envase cilíndrico cuyo radio de la base mide 3 cm y que tiene una altura de 10 cm. Asimismo, calcular la cantidad de cartón cuando la altura se incrementa progresivamente en 1 cm hasta llegar a 15 cm; en cada caso, también calcular el respectivo volumen
3. En una tabla, registrar los valores correspondientes al área lateral y volumen del envase cilíndrico
4. En cada caso, determinar la razón geométrica entre el área lateral y el volumen de cada envase cilíndrico
5. Finalmente, elaborar las conclusiones de la actividad

Propósito principal.

¿Cuál es el **principal** propósito de la actividad propuesta?

a) Que los estudiantes desarrollen habilidades de cálculo del área y volumen de un cilindro.
b) Que los estudiantes establezcan una relación entre el área lateral y el volumen de un cilindro.
c) Que los estudiantes determinen y registren, en una tabla, el área lateral y el volumen de diversos cilindros.

5. Observe el siguiente mapa de España con su respectiva escala.



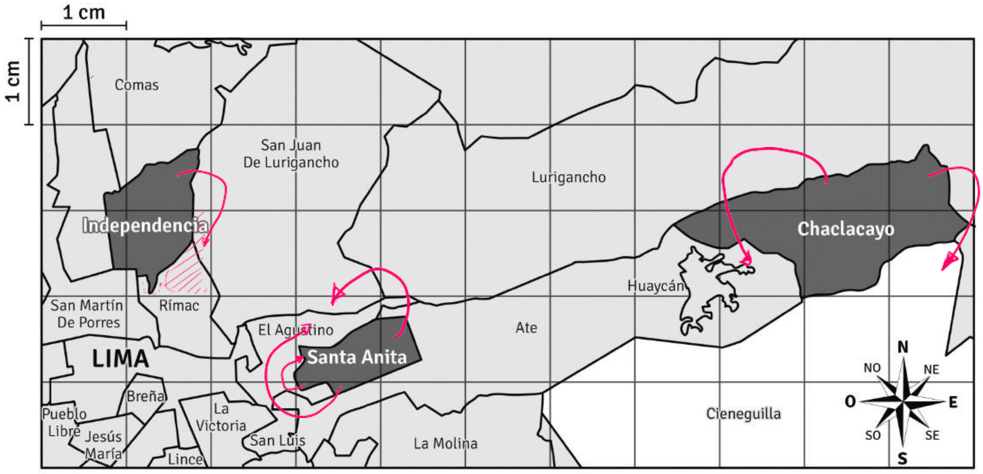
Estimación de medidas

Adaptado de INE (2014). *Península Ibérica.*

¿Cuál es la distancia aproximada entre Madrid y Sevilla?

a) 190 km
b) 380 km
c) 570 km

6. La siguiente imagen es parte del mapa provincial de Lima. La escala utilizada en el mapa es 1 : 350 000.



Adaptado de INEI (2014). *Una mirada a Lima metropolitana*.

MAPA	REALIDAD
1 cm	350 000 cm
1 cm	3500 m
1 cm	3,5 km

a) Trasladando áreas se estima que Independencia ocupa un cuadradito y "algo más"

$A_{aprox} = 3{,}5\ km \times 3{,}5\ km$
$= 12{,}25\ km^2 + \text{algo}$
$\approx 15\ km^2$

A partir de esta información, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto?

a) La medida de la superficie del distrito de Independencia es aproximadamente 30 km^2.

b) La medida de la superficie del distrito de Chaclacayo es aproximadamente 40 km^2.

Aproximadamente ocupa 3 cuadraditos.

$A_{aprox.} = 3(12{,}25\ km^2) = 36{,}75\ km^2 + \text{"algo"}$ → hay cerca de 40 km^2.

c) La medida de la superficie del distrito de Santa Anita es más de 15 km^2.

El área no pasa de un cuadradito (No pasa de 12,25 km^2)

7. Una docente tiene como propósito que sus estudiantes logren inferir una fórmula general para encontrar la suma de los ángulos internos de un polígono.

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para dicho propósito?

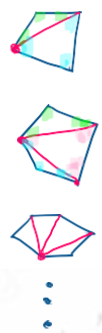
a) Entregar polígonos elaborados con cartulina y de diferente número de lados, y pedirles que, con el transportador, midan los ángulos internos y anoten estas medidas en cada ángulo de los polígonos elaborados. Luego, pedir que, en cada caso, sumen dichas medidas. Finalmente, preguntar por la suma de ángulos internos en cada polígono.

Vale como práctica en el uso de instrumentos para medir. No permite inferir una fórmula general.

b) Proporcionar una cartilla en la que se indica que la suma de ángulos internos de cualquier polígono se determina con la expresión 180°(n – 2). Luego, explicar que "n" corresponde al número de lados de los polígonos. Finalmente, preguntar: "¿Cuánto es la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero, de un pentágono y de un hexágono?".

Mecaniza el uso de la fórmula. No ha deducido la fórmula general.

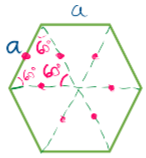
c) Pedir que dibujen un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono para que tracen las diagonales desde un solo vértice. Luego, preguntar por la cantidad de lados del polígono, por la cantidad de triángulos que se formaron en cada polígono y por la suma de ángulos internos que resultaría en cada caso. Finalmente, preguntar por la relación que se puede establecer entre estos datos.

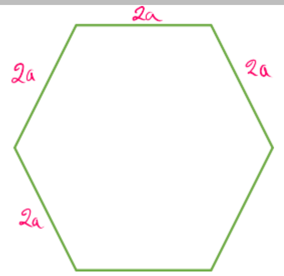


Dibujo:	Nº lados	Nº Triángulos	Suma ∡ internos.
	4 $\xrightarrow{-2}$	2	180°(2)
	5 $\xrightarrow{-2}$	3	180°(3)
	6 $\xrightarrow{-2}$	4	180°(4)
⋮	⋮		
	n $\xrightarrow{-2}$	(n-2)	180°(n-2) = Suma de ángulos interiores en un polígono de n lados.

8. Un docente plantea el siguiente problema a sus estudiantes:

Los lados de un hexágono regular miden 3 cm. Si se duplica la medida de cada uno de sus lados, ¿cuántas veces aumentará su área?





$A_{\Delta eq} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad A_{hexg.\,reg.} = 6\left[\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

$A_{hexg.\,reg.} = \frac{3}{2}(2a)^2\sqrt{3}$

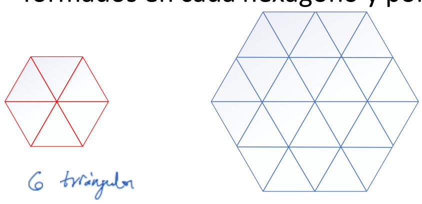
$= 4 \cdot \boxed{\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}}$

Uno de los estudiantes alza la mano y comenta: "Si se duplica la medida de sus lados, entonces, el área también se duplica".

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para brindar retroalimentación al estudiante de modo que reflexione sobre su error?

a) Pedir que construya en cartulina el hexágono original y el ampliado. Luego, preguntar: "¿Cuánto mide el lado del hexágono después de duplicar su medida?". Después, solicitarle que calcule su área y que divida el área encontrada entre 4.

b) Solicitar que grafique el hexágono original y el ampliado. Luego, indicar que divida cada hexágono formando triángulos equiláteros de 3 cm de lado. Después, preguntar por la cantidad de triángulos formados en cada hexágono y por la comparación que se puede establecer entre estos.



6 triángulos $\xrightarrow{\times 4}$ 24 triángulos.

∴ El área se cuadruplica.

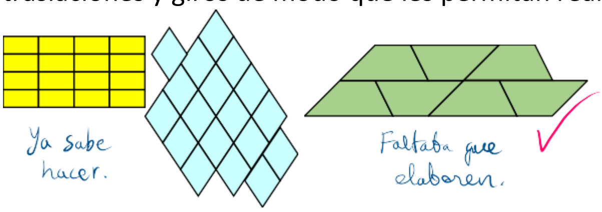
c) Entregar una cartilla con la fórmula del área del hexágono regular. Luego, pedir que encuentre las áreas del hexágono original y del ampliado. Después, comentar que la relación que se establece entre las áreas de ambos hexágonos, después de duplicar la medida de los lados, es de 1 a 4.

9. Un docente ha identificado que sus estudiantes son capaces de realizar teselaciones en un plano con figuras como rectángulos, cuadrados, rombos y romboides. Sin embargo, cuando se les pide que realicen teselaciones con otros cuadriláteros diferentes a los paralelogramos, los estudiantes no logran llevar a cabo lo solicitado.

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para que los estudiantes superen esta dificultad?

a) Entregar la imagen de una teselación realizada con trapezoides simétricos (cometas) y pedir que reconozcan el tipo de cuadrilátero utilizado.

b) Entregar piezas de cartulina en forma de trapecios, todas congruentes, y pedir que realicen traslaciones y giros de modo que les permitan realizar la teselación del plano.



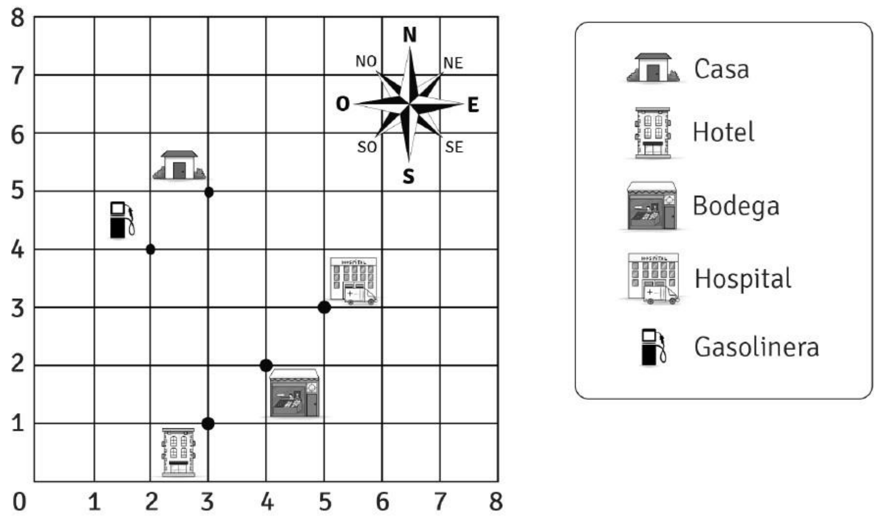
Ya sabe hacer.

Faltaba que elaboren.

c) Entregar bloques lógicos geométricos (triángulos, cuadrados, rectángulos y hexágonos) del mismo tamaño, y pedir que ellos mismos exploren con cuáles de estos bloques pueden realizar teselaciones en el plano y con cuáles no.

10. Una docente tiene como propósito que los estudiantes de primer grado representen la ubicación y el desplazamiento en el plano cartesiano. Para ello, les presentó la siguiente actividad:

En el siguiente gráfico, el lado del □ representa 2 km en la realidad.



Juan se encuentra en el punto (5; 3). A partir de ahí, se desplazará 2 km hacia el oeste y 2 km hacia el sur. ¿Dónde se encontrará Juan después de su desplazamiento?

Uno de los estudiantes asume que Juan parte de la casa y responde que, después de desplazarse, se encontrará en la gasolinera. De acuerdo a la respuesta del estudiante, ¿qué se puede afirmar sobre su desempeño?

a) Que reconoce las unidades y el sentido del desplazamiento.
b) Que identifica la ubicación de puntos en el plano de coordenadas.
c) Que describe desplazamientos utilizando los cinco puntos asociados a los lugares señalados.