GRUPO
DOCENTE PERÚ
ALCANZANDO EL ÉXITO

MATEMÁTICA

PREPARACIÓN

EXAMEN DE ASCENSO 2023

PRÁCTICA 65

MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

REPASO 5: MISCELANEA DE PROBLEMAS

1. El propósito de una docente es favorecer que los estudiantes comprendan los productos notables. Para esto, ella debe diseñar una actividad inicial.

   ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es más pertinente para lograr dicho propósito?

   a) Pedir que construyan las siguientes piezas de cartulina: una pieza cuadrada cuyo lado sea a; 4 piezas rectangulares de lados a y 1 unidad, respectivamente; y 4 piezas cuadradas de 1 unidad de lado. Luego, pedir que con estas piezas formen un cuadrado, para lo cual deben colocar las 4 piezas rectangulares alrededor de la pieza cuadrada de lado a y, en las esquinas, poner las piezas cuadradas de lado 1 unidad. Finalmente, decir que la suma de las áreas de las 9 piezas utilizadas ($a^2 + 4a + 4$) es igual al resultado de $(a + 2)^2$.

   b) Explicar el proceso de resolución de un binomio al cuadrado, de modo que aprendan que el resultado se obtiene de elevar el primer término al cuadrado, sumar el doble del producto del primer término por el segundo y sumar el segundo término al cuadrado. Luego, entregarles una ficha para que efectúen el cuadrado de otros binomios. Finalmente, verificar si desarrollaron correctamente los binomios propuestos.

   c) Entregar 4 piezas de cartulina: 2 de forma cuadrada, una de lado a y otra de lado b, y 2 piezas rectangulares de lados a y b unidades, respectivamente. Luego, pedir que formen un cuadrado de lado (a + b) con las 4 piezas entregadas. Finalmente, solicitar que expresen el área del cuadrado de lado (a + b), en función de la suma de las áreas de las 4 piezas entregadas.

2. ¿Cuál de los siguientes procedimientos **NO** presenta errores al operar con expresiones algebraicas?

   a) Si $a_h = 7(h + 1) + 3$, entonces $a_{h+1} = 7(h + 1 + 1) + 3$

   $$\Rightarrow a_{h+1} = 7(h + 2) + 3$$

   $$\Rightarrow a_{h+1} = 7h + 5$$

   b) Al resolver la ecuación $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x-1}{2} - \frac{7}{2}$

   $$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x-1}{2} = 4 - \frac{7}{2}$$

   $$\Rightarrow \frac{x - x + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

   $$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

   se concluye que tiene infinitas soluciones.

   c) Al desarrollar $F = \frac{1}{3}(m + 1)(4m + 3)$, resulta lo siguiente:

$$F = \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}(4m + 3)$$
$$F = \frac{1}{3}m + \frac{4}{3}m + 1$$
$$F = \frac{5}{3}m + 1$$

3. Un docente tiene el propósito de que los estudiantes **afiancen** su comprensión del reparto proporcional.

   ¿Cuál de las siguientes tareas es pertinente para contribuir al logro de dicho propósito?

   a) Si se sabe que el precio de 1,5 kilogramos de chirimoya es 9 soles, determinar el precio de 3,5 kilogramos de chirimoya.
   b) Determinar la cantidad total de matriculados en un taller de danza si se sabe que hay 36 mujeres matriculadas, y que hay 2 varones por cada 3 mujeres.
   c) En un emprendimiento económico, Juana invirtió 3000 soles y Lizet, 4000 soles. Si se obtuvo una ganancia total de 1400 soles, determinar cuánto le corresponde a cada una de acuerdo a su inversión.

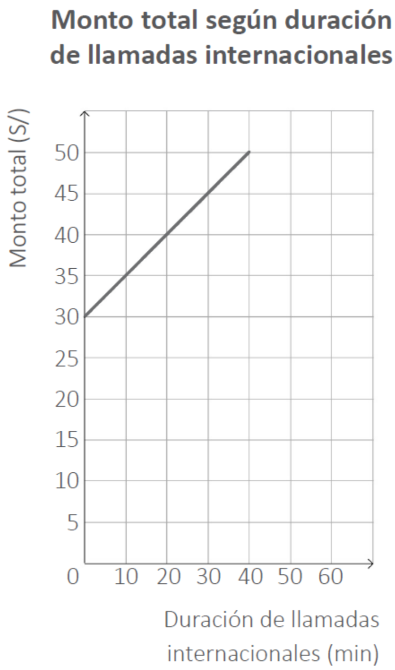
4. Una docente presentó a los estudiantes una secuencia de transformaciones con la imagen de la huella de un pie. En dicha secuencia, los dos últimos términos no estaban graficados.

   Al solicitarles determinar cuáles eran los términos faltantes, algunos estudiantes cometieron un error al responder lo siguiente:

   A partir de esta respuesta, ¿cuál es la transformación geométrica que ellos **NO** identificaron en la secuencia?

   a) La traslación.
   b) La reflexión.
   c) La rotación.

5. En cierto mes, un recibo de telefonía celular que corresponde a un plan postpago para llamadas ilimitadas nacionales contempla los siguientes conceptos: cargo fijo y llamadas internacionales. A partir de la información de dicho recibo, se elaboró la siguiente gráfica:

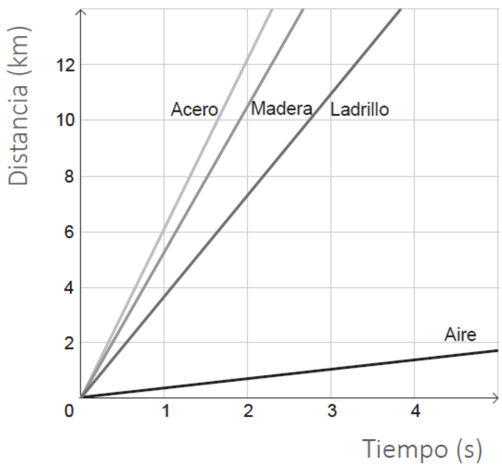


De acuerdo con esta gráfica, ¿cuál es el cargo fijo que se cobra mensualmente en el recibo de telefonía mencionado?

a) S/ 30
b) S/ 40
c) S/ 50

6. La siguiente gráfica muestra la rapidez con la que se propaga el sonido en diferentes medios, según una medición efectuada bajo las mismas condiciones de presión y temperatura.

Propagación del sonido en diferentes medios



Adaptado de Jaramillo, A. M. J. (2007). "Acústica: la ciencia del sonido". *ITM*

Con respecto a la gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) La rapidez de propagación del sonido es mayor cuando se propaga en el acero y en la madera, que cuando se propaga en el ladrillo y en el aire.

b) Mientras aumenta el tiempo transcurrido, también se incrementa la pendiente de las gráficas de las funciones.

c) La pendiente de las rectas es cero cuando el tiempo transcurrido es igual a cero.

7. Karina contrató un plan de telefonía celular por el cual cada 30 días dispone de 10 gigabytes (GB) para navegar por internet. En ese periodo, ella utiliza la misma cantidad de gigabytes cada día, lo que origina que, al final del periodo, le quede exactamente 1 GB sin consumir.

¿Cuál de las siguientes funciones permite establecer la cantidad de gigabytes que Karina ha utilizado cuando ya transcurrieron t días de ese periodo?

a) $f(t)=\frac{3}{10}t+1$

b) $f(t)=\frac{3}{10}t$

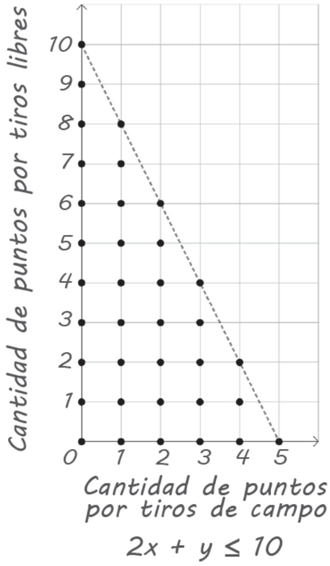
c) $f(t)=10-\frac{3}{10}t$

8. Un docente propone a los estudiantes resolver el siguiente problema:

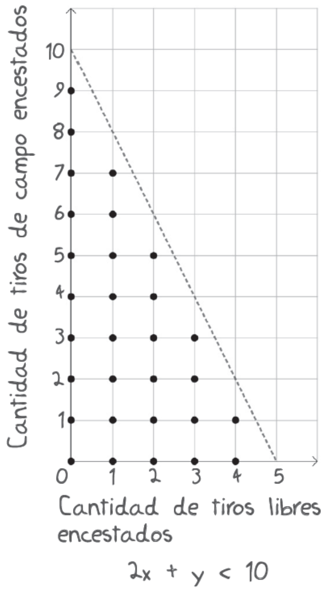
> En cierto campeonato de básquet, se obtiene 1 punto por encestar con tiros libres y 2 puntos por encestar con tiros de campo. Si en cada uno de los cinco últimos partidos, Ricardo hizo como máximo 10 puntos, ¿cuántas canastas de cada tipo pudo haber realizado por partido?

Tres estudiantes coincidieron en que los posibles resultados necesariamente deben ser números naturales. Sin embargo, tal como a continuación se observa, cada quien identificó las variables y elaboró representaciones distintas.

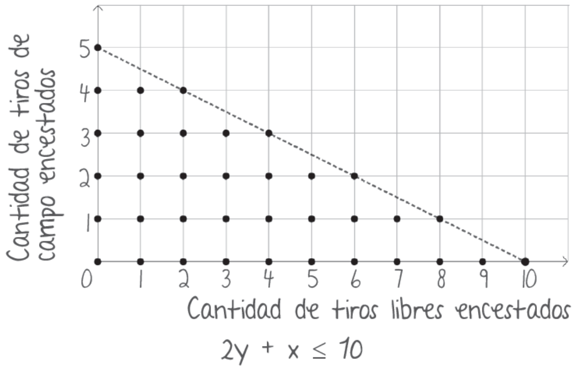
Manuel



Edith



Rosa



¿Quién construyó una representación gráfica correcta del problema propuesto?

a) Manuel.
b) Edith.
c) Rosa.

9. Una docente planteó a los estudiantes el siguiente problema:

> Una empresa, en la que trabajan igual cantidad de mujeres y de varones, dispuso de un monto superior a 1300 soles para repartir una bonificación de 50 soles a cada uno de sus empleados. Si se conoce que, exactamente la quinta parte del total de trabajadores recibirá un ascenso, y que esta es una cantidad menor que 8, ¿cuántos trabajadores en total hay en dicha empresa?

Al respecto, un grupo de estudiantes presentó la siguiente resolución:

Sea x la cantidad total de trabajadores. Por datos del problema, se cumple lo siguiente:

$$1300 < 50x \quad y \quad \frac{x}{5} < 8$$
$$26 < x \quad y \quad x < 40$$
$$26 < x < 40$$

Respuesta: No se puede saber con exactitud la cantidad total de trabajadores; hay muchas posibilidades y son los valores dentro del intervalo $]26; 40[$.

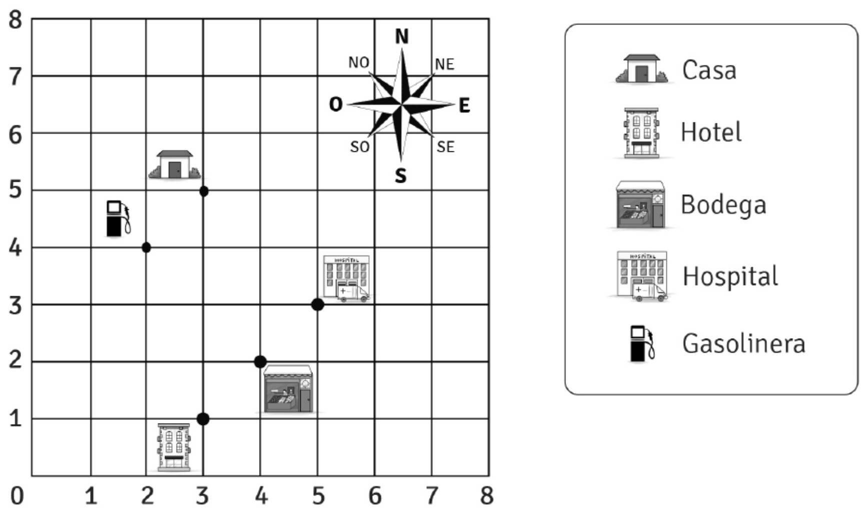
De acuerdo con la respuesta brindada, ¿cuál de las siguientes opciones les hubiera permitido determinar la cantidad total de trabajadores de la empresa?

a) La cantidad total de trabajadores debe ser un número par.
b) La cantidad total de trabajadores debe ser un número entero.
c) La cantidad total de trabajadores debe ser un múltiplo de diez.

10. Cecilia confecciona una camisa en 1 hora y media, y un pantalón en 2 horas. Ella trabaja 8 horas al día a un mismo ritmo. Para entregar un lote de camisas y pantalones, tuvo un plazo máximo de 3 días de trabajo. Si se sabe que en ese lote entregó más de 14 prendas en total, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
a) Cecilia pudo entregar 12 pantalones como máximo.
b) Cecilia pudo entregar 12 camisas como mínimo.
c) Cecilia pudo entregar 8 camisas como máximo.

11. Una docente tiene como propósito que los estudiantes de primer grado representen la ubicación y el desplazamiento en el plano cartesiano. Para ello, les presentó la siguiente actividad:

En el siguiente gráfico, el lado del ☐ representa 2 km en la realidad.

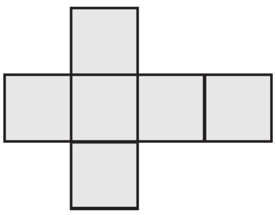


Juan se encuentra en el punto (5; 3). A partir de ahí, se desplazará 2 km hacia el oeste y 2 km hacia el sur. ¿Dónde se encontrará Juan después de su desplazamiento?

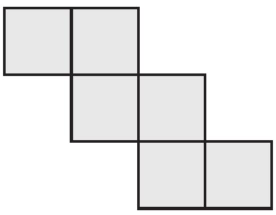
Uno de los estudiantes asume que Juan parte de la casa y responde que, después de desplazarse, se encontrará en la gasolinera. De acuerdo a la respuesta del estudiante, ¿qué se puede afirmar sobre su desempeño?

a) Que reconoce las unidades y el sentido del desplazamiento.
b) Que identifica la ubicación de puntos en el plano de coordenadas.
c) Que describe desplazamientos utilizando los cinco puntos asociados a los lugares señalados.

12. Una docente solicitó a los estudiantes de primer grado que elaboren el desarrollo plano de un hexaedro regular. Estas son las respuestas de dos estudiantes.



Desarrollo plano presentado por Edgar



Desarrollo plano presentado por Mirta

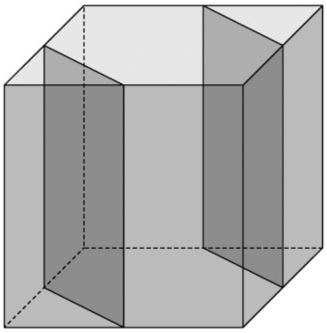
Edgar comenta que el desarrollo plano presentado por Mirta es incorrecto, porque el hexaedro solamente se forma con el desarrollo plano que él ha elaborado.

Respecto al comentario de Edgar, ¿cuál de las siguientes alternativas expresa el error en el que incurre?

a) Considera un modelo usual como el único desarrollo plano del hexaedro.
b) Cree que, en el desarrollo plano del hexaedro, cada cara tiene solo una cara adyacente.

c) Reconoce el hexaedro en su forma tridimensional; sin embargo, no lo hace en su desarrollo plano.

13. Como parte de una actividad, un docente presenta un cubo hecho en madera y le pide a los estudiantes que se imaginen que dos planos paralelos cortan al cubo transversalmente, de modo que cada uno de los planos pasa por los puntos medios de dos aristas consecutivas, tanto en la base superior como en la inferior del cubo, tal como se muestra a continuación:



Además, el docente les solicita que establezcan qué objetos tridimensionales resultarían después de realizar dichos cortes y cuáles serían sus desarrollos planos.

Al respecto, un estudiante dice lo siguiente: “Profesor, yo creo que si realizáramos esos cortes, resultarían tres prismas: dos iguales de base triangular y un prisma de base hexagonal”.

Sin embargo, cuando el estudiante muestra el desarrollo plano de estos prismas, utiliza un triángulo equilátero en un caso y un hexágono regular en otro para los polígonos que representan las bases.

¿Cuál de los siguientes grupos de preguntas es más pertinente para retroalimentar al estudiante de modo que reflexione sobre el error de considerar polígonos regulares en las bases de los prismas?

a) “¿En qué puntos los planos paralelos secantes cortan a las aristas del cubo? Si en el prisma triangular, los lados de sus bases son diferentes, ¿estará bien considerar el triángulo equilátero en su desarrollo plano? Si en el prisma hexagonal, dos de los lados de sus bases son diferentes de los demás, ¿estará bien considerar el hexágono regular en su desarrollo plano?”.

b) “¿Uno de los ángulos rectos de las bases del cubo será uno de los ángulos de la base del prisma triangular? De ser así, ¿esos tres lados tendrán la misma medida? Según sus medidas, ¿ese triángulo será equilátero como en el desarrollo plano que elaboraste? ¿Pasará algo similar con los lados de la base del prisma hexagonal? ¿Por qué?”.

c) “¿Qué polígonos conforman las bases de los prismas? ¿Qué características tienen estos polígonos en los desarrollos planos de los prismas? ¿La cantidad de caras laterales depende de la cantidad de lados del polígono de la base? ¿Por qué crees que es así? ¿Los polígonos que conforman las bases resultarán regulares?”.

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 14, 15 y 16.

Durante una clase, los estudiantes comentan acerca del aumento de la cantidad de personas que consumen a diario agua purificada. Este aumento conlleva una creciente fabricación de botellas de plástico. Al respecto, ellos han leído un artículo que señala que la descomposición de envases de cartón genera 80 % menos gases de efecto invernadero que la descomposición de botellas de plástico. Por este motivo, a los estudiantes les parece una excelente idea emprender un negocio de venta de agua utilizando envases hechos a base de cartón.

14. En el contexto de una exploración de opciones para la utilización de envases hechos a base de cartón, el docente decide proponer diversas tareas.

¿Cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?

a) ¿Cuánto será el volumen de un envase cilíndrico hecho con cartón si el radio de su base mide $3\sqrt{3}$ cm y su altura mide 10,80 cm?

b) ¿En qué porcentaje disminuirá el volumen de un envase cilíndrico hecho con cartón si el radio de su base disminuye hasta la mitad de la longitud inicial y se mantiene constante su altura?

c) Se proyecta elaborar dos tipos de envase que tengan forma de prisma recto y una altura de 9 cm: uno con una base cuadrada de 9 cm^2 de área y otro con una base hexagonal regular de 12 cm de perímetro. ¿En cuál se utilizará más cartón?

15. Uno de los estudiantes diseña un envase de forma cilíndrica. Él afirma que si se duplicara la longitud del radio de la base y se mantuviera la misma altura, el cilindro resultante tendría el doble de volumen que el cilindro original.

Ante esta intervención, el docente busca orientar la reflexión del estudiante acerca de su error. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para ello?

a) Preguntarle lo siguiente: ¿qué forma geométrica tiene el envase?, ¿cuáles son los elementos de esta forma geométrica?, ¿qué sucede con el radio de la base?, ¿cómo se determina el volumen de un cilindro? Luego, señalar que, si se duplica solo el radio, el nuevo volumen no se duplica, sino que se cuadruplica.

b) Entregarle un desarrollo plano para que forme un cilindro. Además, pedirle que señale los elementos del mismo, como altura, radio, base, generatriz, etc. Luego, comentarle que si el radio de la base tuviera el doble de longitud y la altura se mantuviera, el volumen del nuevo cilindro no sería el doble del volumen del cilindro construido con el desarrollo plano entregado.

c) Solicitarle que revise qué elementos debe considerar para calcular el volumen de un envase cilíndrico. Luego, indicarle que exprese el volumen del cilindro en función del radio y la altura, y lo compare con el nuevo volumen cuando la longitud del radio se duplica y la longitud de la altura es la misma. Después, preguntarle si el nuevo volumen es el doble del volumen inicial.

16. El docente propone a los estudiantes realizar la siguiente secuencia de acciones:

1. Conformar grupos de cuatro integrantes
2. Calcular la cantidad de cartón que se utilizaría en el área lateral de un envase cilíndrico cuyo radio de la base mide 3 cm y que tiene una altura de 10 cm. Asimismo, calcular la cantidad de cartón cuando la altura se incrementa progresivamente en 1 cm hasta llegar a 15 cm; en cada caso, también calcular el respectivo volumen
3. En una tabla, registrar los valores correspondientes al área lateral y volumen del envase cilíndrico

4. En cada caso, determinar la razón geométrica entre el área lateral y el volumen de cada envase cilíndrico
5. Finalmente, elaborar las conclusiones de la actividad

¿Cuál es el **principal** propósito de la actividad propuesta?

a) Que los estudiantes desarrollen habilidades de cálculo del área y volumen de un cilindro.
b) Que los estudiantes establezcan una relación entre el área lateral y el volumen de un cilindro.
c) Que los estudiantes determinen y registren, en una tabla, el área lateral y el volumen de diversos cilindros.

17. Una docente planea evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la ecuación de la recta.
Para ello, les plantea la siguiente tarea:

A partir de los datos de la tabla, escribe la ecuación de la recta en la forma *y = mx + b*

x	0	1	2	3
y	4	6	8	10

Al monitorear el trabajo de los estudiantes, la docente se percató de que algunos de ellos resolvieron la tarea de la siguiente forma:

$$m = \frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + b \longrightarrow 8 = \frac{1}{2}(2) + b \longrightarrow b = 7$$

$$y = \frac{1}{2}x + 7$$

Respecto del error en el cálculo de la pendiente de la recta, ¿cuál de las siguientes acciones es más pertinente para retroalimentar a los estudiantes?

a) Solicitarles que representen los puntos de la tabla en un plano de coordenadas y que tracen la recta que pasa por ellos. Luego, preguntarles: "¿Cuántas unidades aumenta en y por cada unidad que aumenta en x?, ¿decir que aumenta 1 unidad en y por cada 2 unidades en x equivale a afirmar que aumenta 2 unidades en y por cada unidad de incremento en x?, ¿cuál de las dos relaciones anteriores corresponde a la pendiente de la recta?".
b) Asociar la pendiente con una inclinación y mostrar el dibujo de tres montañas con diferentes tipos de inclinación. Luego, preguntarles: "¿Cuál de las montañas está más inclinada?, ¿cómo lo sabemos? Análogamente, si en un plano de coordenadas graficamos la recta que pasa por los puntos de la tabla, ¿cuánta es la diferencia entre dos valores de x?, ¿cuánta es la diferencia entre dos valores de y?".
c) Pedirles que tomen dos puntos de la tabla, por ejemplo, los puntos (0; 4) y (1; 6), los reemplacen en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y que calculen su resultado. Luego,

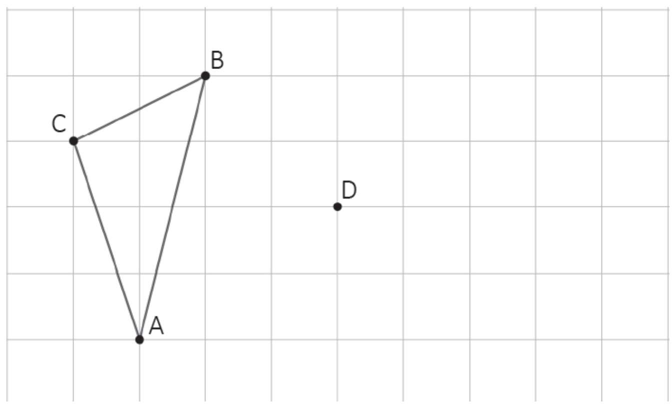
preguntarles: “¿Cómo se calcula la pendiente?, ¿cuál es la diferencia entre su primera respuesta y la de ahora? Con los puntos (2; 8) y (3; 10), ¿cómo se calcularía la pendiente?”.

18. En una prueba escrita, un docente debe elaborar una pregunta que corresponda al siguiente indicador: “Identifica una sección cónica a partir del reconocimiento de atributos específicos que la definen”.
¿Cuál de las siguientes preguntas es más pertinente para ese propósito?

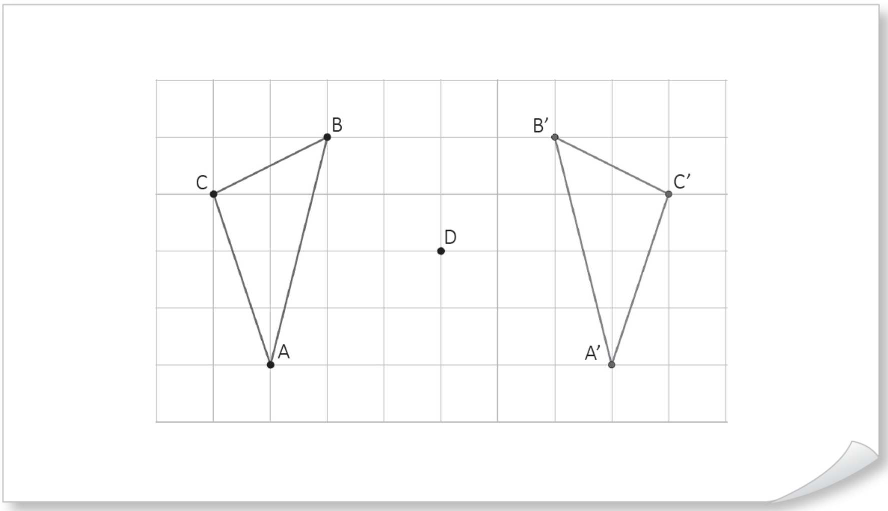
a) ¿Cuál es la cónica que se forma por la intersección de un cono circular recto y un plano perpendicular al eje de rotación de dicho cono?
b) ¿Cuál es la cónica conformada por los puntos del plano que equidistan del punto (-2; 5) una distancia igual a 7 unidades?
c) ¿Cuál es la cónica que corresponde a la siguiente ecuación: $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{36}=1$?

19. Un docente tiene como propósito que los estudiantes de segundo grado apliquen transformaciones isométricas en formas bidimensionales. Para ello, les presenta la siguiente tarea:

En la siguiente figura, ¿cuál es el resultado de aplicar una simetría central al triángulo ABC con respecto al punto D?



Camila, una de las estudiantes, presentó la siguiente resolución:



¿Qué error se evidencia en la respuesta de Camila?

a) Cree que por el punto D pasa una recta que es mediatriz de los segmentos que unen los puntos del triángulo dado y los correspondientes del triángulo simétrico.
b) Cree que el punto D equidista de cada uno de los vértices del triángulo dado, al igual que de los del triángulo simétrico.
c) Cree que D es un punto de rotación que permite, mediante un giro, obtener los puntos del triángulo simétrico.

20. Una docente percibe que muchos estudiantes piensan que la homotecia es la ampliación de una figura en la que, dado un punto fijo cualquiera, todas las distancias tomadas desde ese punto a los puntos de la figura se multiplican por un mismo factor. Por eso, siempre la nueva figura será más grande que la figura inicial.
Ante esto, la docente les propone las siguientes preguntas: “¿Cómo será la nueva figura después de aplicar una homotecia con factor $\frac{1}{2}$? ¿Será más grande o más pequeña que la figura inicial?”.
¿Por qué las preguntas de la docente favorecen la generación de conflicto cognitivo en estos estudiantes?

a) Porque promueven la motivación y la participación de los estudiantes al preguntarles por sus saberes previos.
b) Porque cuestionan la creencia de los estudiantes respecto de una relación o de un objeto matemático.
c) Porque son de alta demanda cognitiva y promueven un aprendizaje significativo.