

MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

Miscelánea 3

- Una docente tiene como **propósito** que los estudiantes **comprendan el significado de las homotecias** de figuras bidimensionales.
¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para promover el logro de dicho propósito?
 - Presentar la definición de homotecia: “es una transformación geométrica que asocia a cada punto P con el punto P' que cumple la condición $d(OP') = k \cdot d(OP)$, siendo O un punto fijo llamado centro y “k” la razón de proporcionalidad”. Luego, proponer que determinen la figura que resulta después de aplicar una homotecia a un cuadrado si $O = (1;2)$ y $k = 3$ y resolver dudas si las hubiera.
 - Solicitar que formen equipos. A cada equipo entregarle una ficha de trabajo que contenga polígonos en los que se ha aplicado una ampliación o reducción de sus dimensiones a partir de la unión de un punto externo y los vértices de tales polígonos. Luego, proponer que los equipos se guíen de los procedimientos plasmados en estas fichas para aplicar homotecias centrales en otros polígonos.
 - Pedir que dibujen un polígono y que, desde un punto externo, tracen segmentos punteados hacia cada uno de los vértices. Luego, preguntar: “si prolongásemos hasta duplicar la longitud de cada segmento punteado y uniéramos sus extremos consecutivamente para formar un nuevo polígono, ¿cómo sería la longitud de sus lados respecto de los lados correspondientes del polígono inicial?, ¿los lados se ampliarían proporcionalmente?”.

- Un docente propone a sus estudiantes el problema que aparece a continuación:

Una oficina tiene las siguientes medidas y forma:



Calcular el **volumen** de la oficina para poder instalar correctamente un sistema de aire acondicionado y de calefacción.

Un estudiante presentó la siguiente resolución al problema.

$$\begin{aligned}A_1 &= 10 \text{ m} \times 4,5 \text{ m} = 45 \text{ m}^2 \\A_2 &= 10 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 30 \text{ m}^2 \\A_3 &= 4,5 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 13,5 \text{ m}^2 \\A_4 &= 2(45 \text{ m}^2) + 2(30 \text{ m}^2) + 2(13,5 \text{ m}^2) \\A_4 &= 177 \text{ m}^2\end{aligned}$$

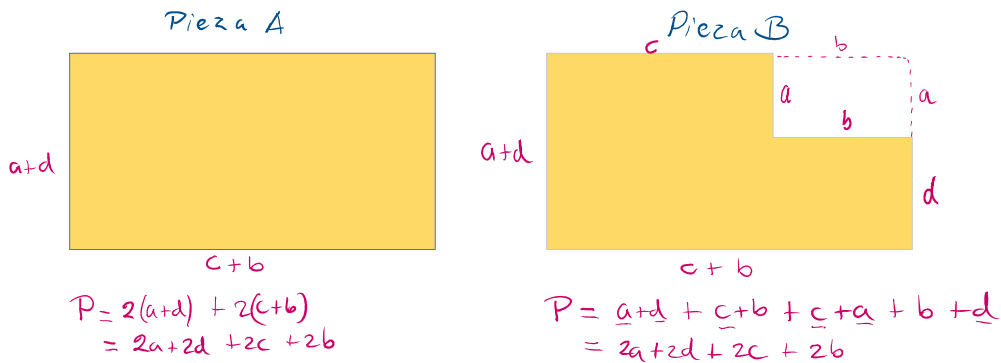
Luego de revisar esta resolución, el docente decide hacer una **retroalimentación escrita** para que el estudiante **reflexione sobre su error**.

¿Cuál de las siguientes expresiones es **más pertinente** para proveer dicha retroalimentación?

- “Los resultados de tus operaciones son correctos; sin embargo, es necesario que repases nuevamente la clase y vuelvas a resolver la tarea con detenimiento. ¡Tú puedes mejorar!”.
- “Si tuvieras una caja de base rectangular, ¿la cantidad de papel mínima que necesitarías para **forrarla** será igual que la cantidad de papel mínima necesaria para **llenar**la por completo? Revisa tu resolución”.
- “La resolución correcta es $V = 10 \text{ m} \times 4,5 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 135 \text{ m}^3$. ¿Se parece a lo que hiciste? ¿Cómo puedes mejorar tu respuesta? Revisa tu procedimiento, corrígelo y preséntalo nuevamente”.

3. Una docente propone a los estudiantes la siguiente actividad:

Recorten dos piezas de cartulina de forma rectangular y del mismo tamaño. Una de estas se mantendrá inalterable y será denominada pieza A. En la segunda pieza, se debe recortar un pequeño trozo de forma rectangular en la parte superior derecha. Después del corte, quedará la región hexagonal que será denominada pieza B.



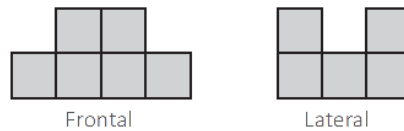
La docente ha planteado las siguientes tareas relacionadas con la actividad anterior. ¿Cuál de ellas es de **mayor** demanda cognitiva?

- a) ¿El área de la pieza A es menor, igual o mayor que el área de la pieza B?
- b)** ¿El perímetro de la pieza A es menor, igual o mayor que el perímetro de la pieza B?
- c) ¿Cuánto es el perímetro y el área de la pieza B si se conocieran las medidas de cada lado?

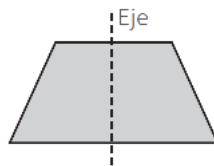
4. Con el propósito de fomentar el desarrollo de habilidades de visualización geométrica, el docente propone a los estudiantes diversas tareas.

¿Cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?

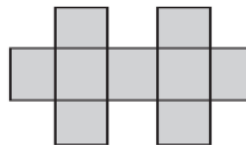
- a)** Grafica un sólido hecho con cubos que se corresponda con las siguientes vistas:



- b) Si se hace girar un trapecio alrededor de su eje, ¿qué sólido se obtendrá?

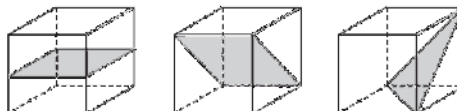


- c) ¿Cuántos rectángulos en total hay en la figura?

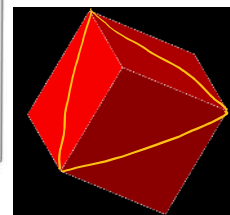
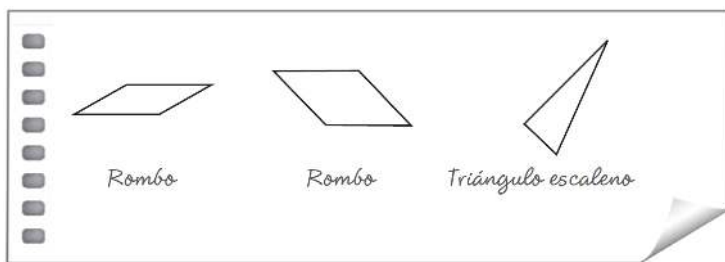


5. Una docente propone a los estudiantes la siguiente actividad:

En los sólidos, las regiones grises indican las figuras planas que se generan al cortar cada uno de los **cubos** en dos piezas.



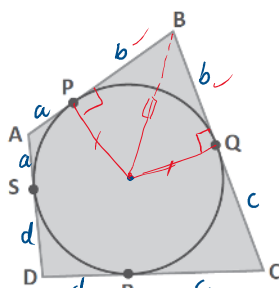
En cada caso, dibuja la figura que corresponde a la región gris y nómbrala.
Fidel, un estudiante, presentó los siguientes gráficos:



¿Cuál de las siguientes alternativas expresa la dificultad que evidencia Fidel en estas representaciones?

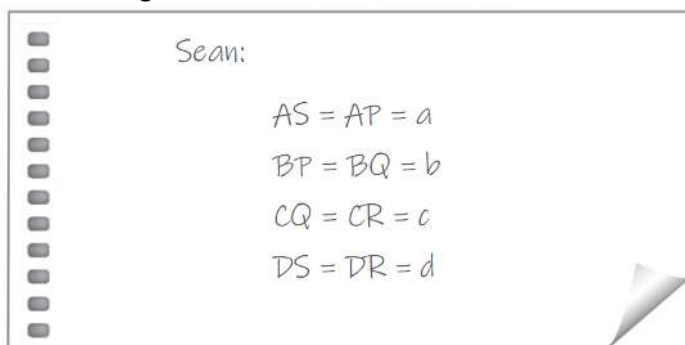
- a) No identifica la proyección que forman las líneas al trazarse en perspectiva.
- b) No visualiza las posiciones relativas entre aristas, caras y diagonales de las caras.**
- c) No reconoce las características de las formas geométricas básicas de dos dimensiones.

6. Un docente pide a los estudiantes que demuestren que en todo cuadrilátero en el que se ha inscrito una circunferencia se cumple que la suma de las longitudes de dos lados no consecutivos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Así, en el siguiente gráfico, se cumple que $AD + BC = AB + DC$.



- Tm de tangentes (Caso de Congruencia CH)
- Tm de Pitágoras.

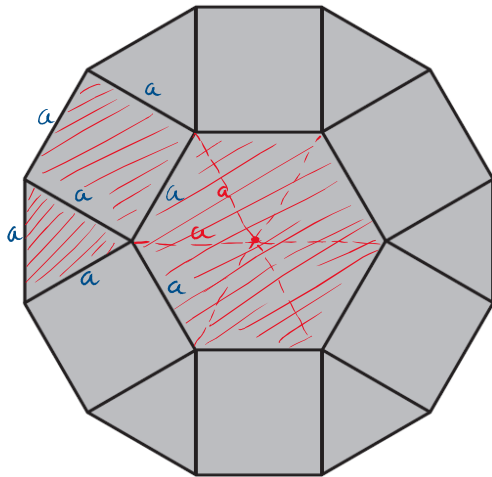
Durante el monitoreo del proceso de demostración, el docente observa que un grupo de estudiantes avanzó lo siguiente:



¿Cuál de las siguientes alternativas es una interpretación apropiada del procedimiento que han seguido los estudiantes?

- a) Se han descompuesto los lados del cuadrilátero en segmentos determinados por puntos de la gráfica. Luego, se les ha asignado una notación literal para reemplazarla en:
 $AD + BC = AB + DC$.
- b) Se ha determinado la congruencia de los segmentos que se extienden desde un vértice hasta los puntos de tangencia. Esto permitirá establecer relaciones entre las medidas de los lados del cuadrilátero.**
- c) Se han utilizado representaciones gráficas y notaciones simbólicas tanto para presentar la situación como para una parte de la solución. Se representan segmentos, puntos de tangencia, vértices y ángulos.

7. Un mosaico está conformado por un hexágono regular, cuadrados y triángulos equiláteros, tal como se muestra a continuación:



a) Área del mosaico original

$$A_T = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)12 + 6a^2 = 3a^2\sqrt{3} + 6a^2$$
 ✓

$$A_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Supuesta $A_T = 24 \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = 6a^2\sqrt{3}$ ✗

b)
$$A_{\text{hexag.}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$A_{\text{Cuadr.}} = 6a^2$$

$$6a^2 < \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$6a^2 < 2,55a^2$$
 Falso $\frac{1,7 \times 1,5}{2,55}$

En cuanto a la superficie del mosaico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a) El área total del mosaico es equivalente a 24 veces el área de una de las piezas triangulares que lo conforman.
- b) La suma de las áreas de todos los cuadrados que componen el mosaico es menor que el área del hexágono regular.
- c) Si la medida de cada lado de todas las figuras que componen el mosaico se duplica, manteniéndose la forma original del mismo, el área total del nuevo mosaico se cuadruplicaría.

A. Mosaico original

$$3a^2\sqrt{3} + 6a^2$$

Mosaico modif.

$$3(2a)^2\sqrt{3} + 6(2a)^2$$

$$4(3a^2\sqrt{3} + 6a^2)$$

8. En el marco de una actividad de investigación que involucra utilizar conocimientos de estadística descriptiva, se han conformado equipos de estudiantes de tercer grado.

Si uno de los propósitos del docente es **promover** el **aprendizaje autónomo** de los estudiantes, ¿cuál de las siguientes acciones pedagógicas es más **pertinente** para dicho propósito?

- a) Plantearles que, con fines de investigación, elijan una temática importante para todos los estudiantes de la IE que les permita utilizar tablas y gráficos estadísticos. Luego, darles un plazo adecuado de ejecución e indicar que el resultado debe sistematizarse y presentarse en el aula.
- b) Solicitarles que determinen una problemática de la IE que ellos consideren importante. Luego, pedirles que diseñen un instrumento de recojo de datos estadísticos, y, una vez mejorado, que lo apliquen. Finalmente, monitorear el procesamiento de datos y su presentación en el aula.
- c) Preguntarles, mediante una encuesta, qué quisieran cambiar en la IE. A partir de los resultados, asignar a cada equipo una problemática y plantearle una secuencia de pasos que incluya el uso de medidas de posición y medidas de dispersión. Precisarles que el resultado se expondrá en el aula.

9. Un docente busca que los estudiantes **desarrollen** sus **habilidades para investigar**. En este contexto, el docente presenta la siguiente situación a los estudiantes:

En un distrito con aproximadamente 500 000 habitantes, se ubica una institución educativa a la que se puede acceder en transporte público, auto particular o a pie. Esta institución tiene alrededor de 1500 estudiantes. Debido a los serios problemas con el tránsito vehicular, los directivos iniciaron un estudio para conocer qué medio de transporte usan los estudiantes al trasladarse al local escolar. Para ello, se aplicó una encuesta a 220 estudiantes.

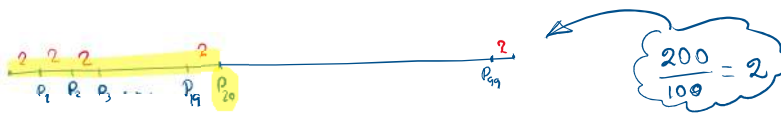
Como primera actividad, el docente pidió a los estudiantes que identifiquen la población objeto de estudio. ¿Quién respondió correctamente?

- a) Luis dijo: "Es el total de habitantes del distrito, es decir, 500 000 personas".
- b)** Alondra dijo: "Es el total de estudiantes de la IE, es decir, 1500 personas".
- c) Elizabeth dijo: "Son los estudiantes encuestados, es decir, 220 personas".

10. Una docente planifica una sesión de aprendizaje de quinto grado, en la que se resolverán problemas que involucran a los percentiles.

En el diseño de una actividad, ella selecciona un gráfico que muestra la distribución de datos referidos al tiempo empleado por los 200 competidores de una maratón escolar. En este gráfico, se aprecia que está marcado el percentil 20 de la distribución de datos.

La docente proyecta, como una de las tareas, que los estudiantes determinen el valor de verdad de afirmaciones relacionadas con la situación.



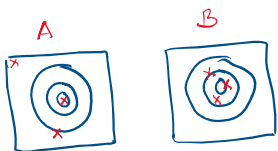
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) El percentil 20 es el cociente de la división del total de datos de la distribución, referidos a los tiempos de los competidores, entre 20.
- b)** Dos de cada diez datos de la distribución, referidos a los tiempos de los competidores, están ubicados por debajo del percentil 20.

En $P_{(20)}$ se tiene 40 de 200 $\rightarrow \frac{40}{200} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$

- c) El percentil 20 indica que, por debajo de este valor, se encuentran 20 datos de la distribución referidos a los tiempos de los competidores.

11. La siguiente tabla muestra la **media** y **desviación estándar** de los tiempos de entrega de 10 repartos de menú a domicilio realizados por tres restaurantes, ubicados en un mismo distrito, durante la mañana de un mismo día.



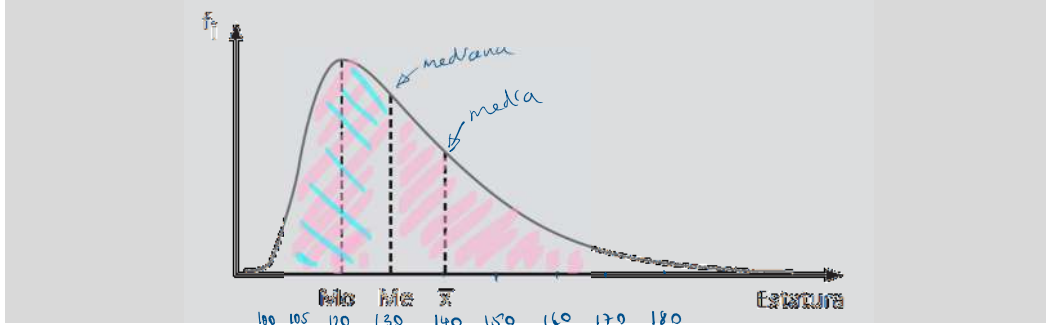
Restaurantes	Media de los tiempos (min)	Desviación estándar (min)
Restaurante 1	18	3
Restaurante 2	19	2
Restaurante 3	21	1

A partir de esta información, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a) Los repartos del restaurante 1 siempre demoran menos que los repartos de los otros dos restaurantes.
- b) Los repartos del restaurante 2 demoran entre 17 y 21 minutos en todos los casos.
- c)** Los repartos del restaurante 3 demoran usualmente tiempos similares entre sí.

12. En el marco de una sesión de aprendizaje en la que los estudiantes de quinto grado interpretan distribuciones de frecuencias, un docente presentó la siguiente situación:

El entrenador de un equipo de básquet organizó una convocatoria para seleccionar nuevos jugadores y midió las estaturas de todos los que postularon. Luego, representó la distribución de las frecuencias de los datos mediante el siguiente gráfico:

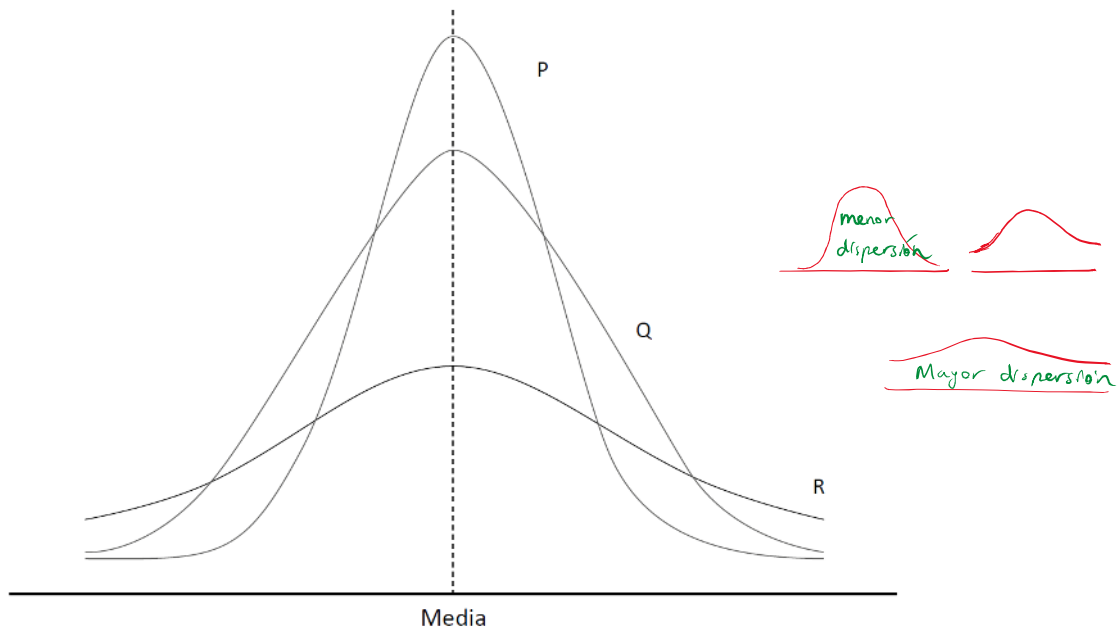


Luego, el docente pidió que establezcan conclusiones a partir del gráfico.

Tres estudiantes respondieron. ¿Quién planteó una conclusión correcta?

- a) Julia dijo: “Más de la mitad de los postulantes presentan estaturas por debajo de la media”.
- b) Luis dijo: “Las estaturas más bajas de los postulantes se ubican en el lado derecho de la distribución”.
- c) Kiara dijo: “La moda de los datos está representada por la mayor de las estaturas de los postulantes”.

13. El siguiente gráfico representa la distribución de 3 conjuntos de datos: P, Q y R.



Con respecto al gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Los datos de los tres conjuntos están igual de dispersos.
- b) Los datos del conjunto R tienen mayor dispersión que los de P y Q.
- c) Los datos del conjunto P están más dispersos que en los otros conjuntos.

14. En una de sus caras, cuatro tarjetas de las mismas características presentan un único número que puede ser 1, 2, 3 o 4. Todas ellas se colocan indistintamente sobre una mesa, de modo que no se observe su respectivo número. Una a una, Úrsula levanta tres tarjetas, y observa el número que presentan. ¿Cuál es la probabilidad de que los números observados aparezcan en orden decreciente?

- a) $\frac{1}{3}$
 b) $\frac{1}{6}$
 c) $\frac{1}{12}$

Experimento aleatorio: ¿Qué se va a hacer?
 Extraer 3 cartas en orden

Espacio muestral: ¿De cuántas formas puede ocurrir el experimento?

$$\Omega = \{(1;2;3), (2;4;1), (1;4;2), \dots\}$$

$$n(\Omega) = P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{24}{1} = 24$$

Otra forma: ${}^4P_3 = 2^{\circ}C_1 \cdot 3^{\circ}$

$$n(\Omega) = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Evento o suceso: ¿Qué se espera que suceda? Casos favorables

4; 3; 2; 1

$$E = \{(4,3,2), (4,2,1), (4,3,1), (3,2,1)\} \rightarrow n(E) = 4$$

Probabilidad: Regla de Laplace:

$$P[E] = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \quad P[E] = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

15. En un estudio médico referido a la incidencia de una enfermedad muy grave en cierta ciudad, se encontró que, del total de sus habitantes, el 10 % cree que está enfermo y realmente lo está. El 60 % cree que está enfermo; sin embargo, no lo está. El 5 % cree estar sano, pero no lo está, y el 25 % cree estar sano y realmente lo está. Durante uno de los chequeos preventivos, realizado por la municipalidad de esa ciudad, será atendido un habitante que cree estar enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona esté realmente enferma?

- a) $\frac{1}{10}$
 b) $\frac{1}{7}$
 c) $\frac{7}{10}$

Usamos diagrama de Carroll.

	Enfermos	Sanos	
Cree estar enfermo	10%	60%	→ 70%
Cree estar sano	5%	25%	→ 30%
	↓ 15%	↓ 85%	

Prob. condicional: Se elige a una persona que cree estar enfermo

$$\checkmark n(\Omega) = 70\%$$

$$\checkmark n(E) = 10\%$$

$$P[E] = \frac{10\%}{70\%} = \frac{1}{7}$$

16. En el año 2017, se realizó el XII Censo Nacional de Población. Este mostró desafíos para superar brechas. Entre otros datos, este censo recogió información sobre la afiliación a algún seguro de salud. A continuación, se presenta dicha información:

Perú: población censada afiliada a algún seguro de salud según área de residencia, 2017

Estado de afiliación	Urbana	Rural
Con seguro	17 millones	5 millones
Sin seguro	6 millones	1 millón

Adaptado de INEI (2018). "Población afiliada a algún seguro de salud".

6 mill.

Si una persona elegida al azar es del área rural, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona esté afiliada a algún seguro de salud?

- a) $\frac{5}{6}$
- b) $\frac{5}{22}$
- c) $\frac{5}{29}$

$$n(\Omega) = (5+1) \text{ millones}$$

$$n(S) = 5 \text{ millones}$$

$$P[S] = \frac{5}{6}$$

17. Una docente tiene como propósito que los estudiantes de segundo grado afiancen su comprensión de la probabilidad de un suceso. Por ello, ha planteado la siguiente situación:

Una persona va registrando si los veraneantes que llegan a una playa son varones o mujeres. Se conoce que la probabilidad de que llegue un varón es $\frac{1}{2}$. Cierta día, se hizo el registro de las primeras seis personas que ingresaron a la playa a partir del mediodía. Si se representa con "V" a cada varón y con "M" a cada mujer, ¿cuál de los siguientes sucesos tiene mayor probabilidad de aparecer en ese registro?, ¿ambos son igualmente probables? O ¿no se puede saber?

Suceso A: VMMVMV $P[A] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

Suceso B: VVVVMV $P[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$

Un estudiante respondió que el suceso A tiene mayor probabilidad de aparecer en el registro.

¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se evidencia en su respuesta?

- a) Considera la comparación entre los casos favorables del suceso A y del suceso B.
- b) Considera la aparente simplicidad del ordenamiento entre varones y mujeres que presenta el suceso A a partir de su experiencia personal.
- c) Considera que el suceso A tiene una composición de cantidades de varones y de mujeres similar a la de la población de veraneantes que llega a esa playa.

18. Como parte de un estudio realizado a 100 estudiantes, se obtuvo que la media de sus edades es 21 años y su desviación estándar es 2 años. En relación con esta información, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es válida?

- a) Las edades de los estudiantes se alejan de 21 años en un valor promedio de 2 años.
- b) En el grupo de 100 estudiantes, la edad mínima es 19 años y la edad máxima es 23 años.
- c) Al sumar las diferencias de cada uno de los 100 datos, con respecto de la media, se obtiene cero.

$$2; 3; 4; 5; 6 \rightarrow \bar{x} = 4$$

$$\text{Dif. } x_i - \bar{x} = -2 + -1 + 0 + +1 + +2 = 0$$

Suma de diferencias

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2} = 1,41$$

19. Un docente solicitó ejemplos sobre situaciones que involucran el cálculo de la probabilidad de **sucesos dependientes**. Tres estudiantes dieron las siguientes respuestas:

Hugo: "La probabilidad de que el tercer foco revisado esté en buen estado durante la revisión de un lote de 100 focos con un 2 % de focos defectuosos".

$$100 \text{ focos} \begin{cases} \text{Buenos: } 98 \\ \text{Defectuosos: } 2 \end{cases} \quad P = \frac{98 \cdot 97 \cdot 96}{100 \cdot 99 \cdot 98} + \frac{2 \cdot 98 \cdot 97}{100 \cdot 99 \cdot 98} + \frac{98 \cdot 2 \cdot 97}{100 \cdot 99 \cdot 98} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 98}{100 \cdot 99 \cdot 98}$$

$$\text{BBB} \quad \vee \quad \text{DBB} \quad \vee \quad \text{BDB} \quad \vee \quad \text{DDB}$$

Gladys: "La probabilidad de obtener, en una segunda extracción, una bolilla de color rojo si se conoce que la urna contiene 1 bolilla roja, 1 bolilla azul y 1 bolilla blanca, y que **siempre se devuelve a la urna la bolilla extraída**".

Fernando: "La probabilidad de obtener cara en el tercer lanzamiento consecutivo de una moneda si se conoce que en el primer lanzamiento se obtuvo cara y en el segundo lanzamiento se obtuvo sello".

¿Quién propuso un ejemplo correcto?

- a) Hugo
- b) Gladys
- c) Fernando

20. Con el propósito de **promover** la **interpretación de la probabilidad de un suceso**, un docente propuso la siguiente situación a los estudiantes.

Muchos jóvenes desean estudiar una carrera universitaria en una universidad pública. Una investigación reportó que la probabilidad de ingreso a cierta universidad pública el año anterior fue 0,4. De otra parte, para este año se proyecta que la probabilidad de ingresar a esa universidad disminuiría en 15 puntos porcentuales respecto de la probabilidad del año anterior. Expresar una interpretación de la probabilidad de ingreso para este año.

Tres estudiantes ofrecen sus respuestas. ¿Quién expresa **una interpretación correcta** acerca de la probabilidad de ingreso en este año?

- a) Augusto dice: "Este año se espera que ingresen 15 de cada 40 postulantes".
- b) María dice: "La probabilidad de ingreso es 0,25".
- c) Lucía dice: "Este año ingresará 1 de cada 4 postulantes".

$$P[\text{ingresar el año anterior}] = 0,4$$

$$P[\text{ingresar este año}] = 0,4 - 15\% = 0,40 - 0,15 = 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$