

PRÁCTICA 59

MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

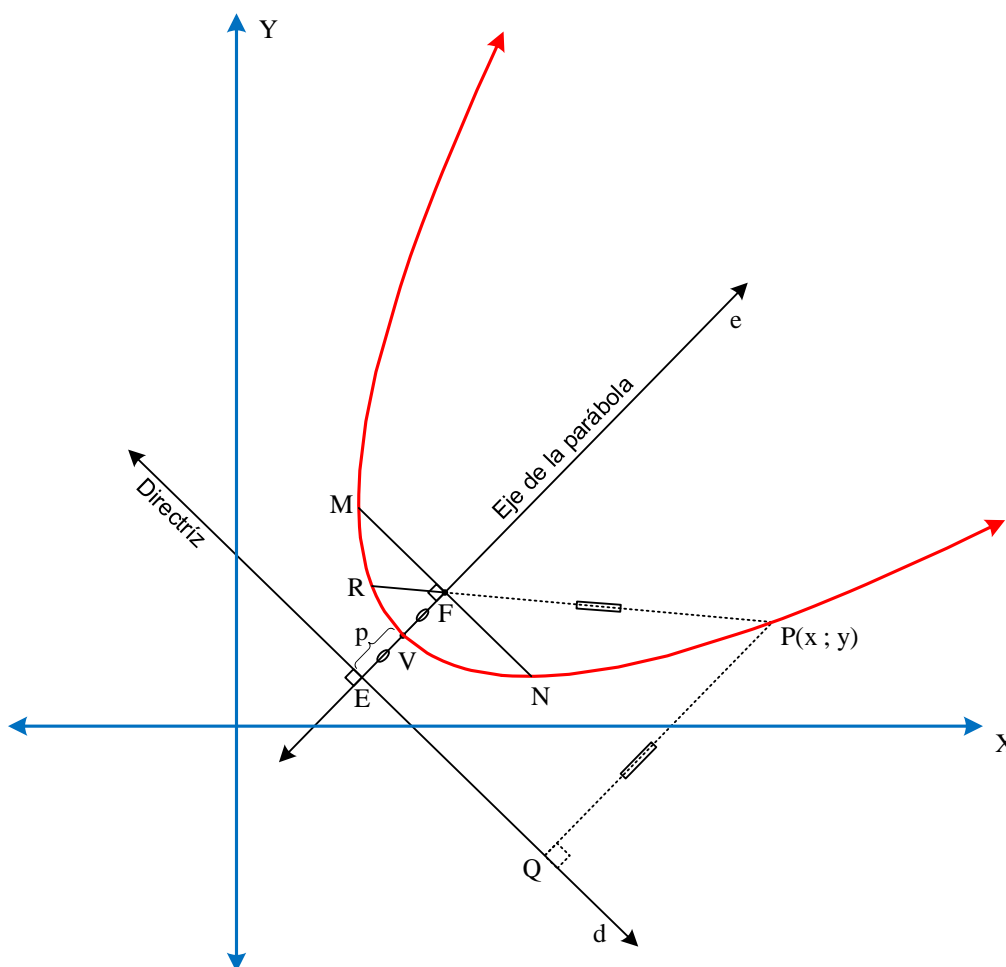
Competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

Temas: Geometría Analítica: Ecuación de la parábola.

LA PARÁBOLA

Definición

Es el lugar geométrico de todos los puntos contenidos en un mismo plano tal que cualquier punto perteneciente a la parábola equidista de un punto fijo llamado foco y una recta fija conocida como recta directriz: $PF = PQ$.



Elementos:

\vec{d} : Recta directriz

V : Vértice

\overline{PR} : Cuerda focal

\vec{e} : Eje Focal o eje de la parábola

F : Foco

\overline{MN} : Lado Recto = $4p$

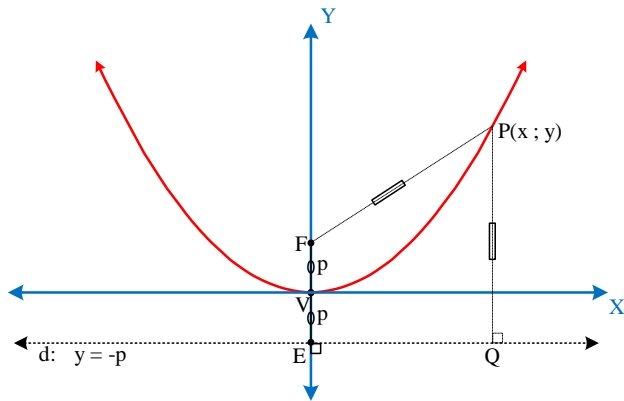
$VF = VE = p \wedge PF = PQ$

Conoce a la parábola interactuando con Geogebra
<https://www.geogebra.org/m/zqq9cpnc>

Casos:

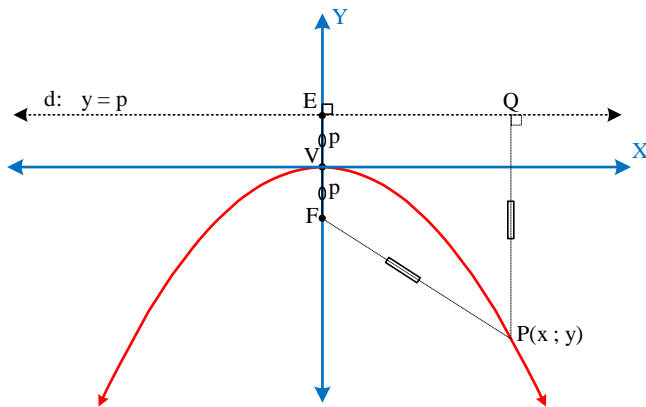
a) Si el eje de la parábola coincide con el eje Y

$$x^2 = 4py$$



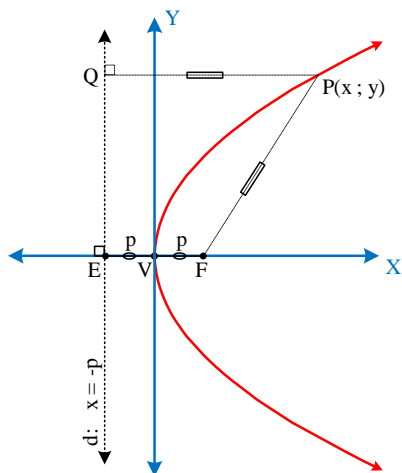
b) Si el eje de la parábola coincide con el eje Y

$$x^2 = -4py$$



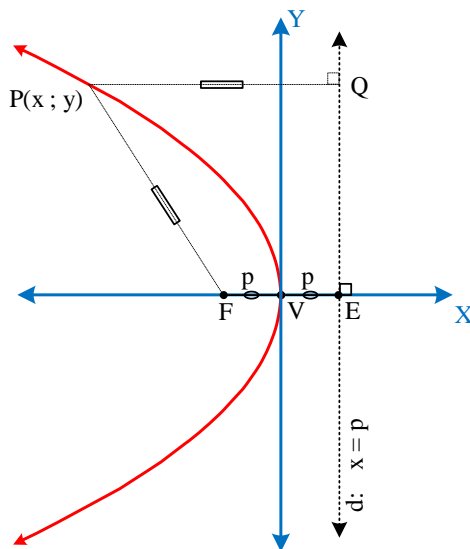
c) Si el eje de la parábola coincide con el eje X

$$y^2 = 4px$$



d) Si el eje de la parábola coincide con el eje Y

$$y^2 = -4px$$



ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

Forma general o canónica: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ Vértice en (h, k) y eje focal paralelo al eje y.

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ Vértice en (h, k) y eje focal paralelo al eje x

Forma ordinaria: $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ Eje focal paralelo al eje y

$Ay^2 + By + Cx + D = 0$ Eje focal paralelo al eje x

PROBLEMAS SOBRE ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

1. Un docente tiene como propósito que sus estudiantes transformen la ecuación $x^2 - 14x + 16y + 81 = 0$ de una parábola a la forma canónica para identificar sus elementos y características de su lugar geométrico.

Tres estudiantes realizaron sus procesos respectivos y expresaron algunas respuestas:

- Raquel afirma que el vértice es (7; -2), el foco (7; -6), la ecuación de la directriz es $y = 2$, además el lado recto mide 16 unidades.
- Manuel afirma que la parábola se abre hacia abajo y su eje focal tiene como ecuación a $x = 7$.
- Guillermo afirma que la parábola se abre hacia arriba y tiene como vértice al punto (-7; 2)

¿Quién de los estudiantes muestra un error en su respuesta?

- a) Raquel
- b) Manuel
- c) Guillermo

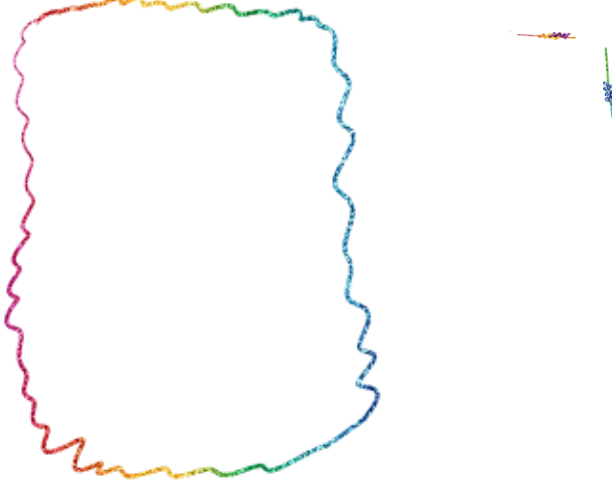
2. Hallar La ecuación de la parábola, cuyo vértice es el punto (5 ; 7) y su foco (5 ; 3).

- a) $x^2 - 10x + 16y - 87 = 0$
- b) $x^2 - 5x - 7y - 3 = 0$
- c) $x^2 + 10x + 14y - 6 = 0$

3. Hallar la ecuación de la parábola que tenga por foco $F(\frac{-5}{3}; 0)$ y directriz la recta $3x - 5 = 0$.

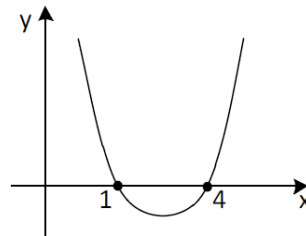
- a) $3y^2 - 20x = 0$
- b) $5y^2 + 15x = 0$
- c) $3y^2 + 20x = 0$

4. Halla la ecuación de una parábola cuyo foco sea el punto (3;7) y la ecuación de su directriz sea la recta $2x-5y+3=0$. Luego haciendo el uso de un recurso tecnológico (Calculadora gráfica o Geogebra) graficar el lugar geométrico de la ecuación.



5. Dada la gráfica siguiente: ¿Cuál es la ecuación que le corresponde?

- a) $y = (x + 1)(x + 4)$
- b) $y = x^2 - 4$
- c) $y = (x - 1)(x - 4)$



6. En una prueba escrita, un docente debe elaborar una pregunta que corresponda al siguiente indicador: "Identifica una sección cónica a partir del reconocimiento de atributos específicos que la definen".

¿Cuál de las siguientes preguntas es **más** pertinente para ese propósito?

- a) ¿Cuál es la cónica que se forma por la intersección de un cono circular recto y un plano paralelo a la generatriz de dicho cono?
- b) ¿Cuál es la cónica conformada por los puntos del plano que equidistan del punto fijo (2; 3) y la recta con ecuación $y = -1$?

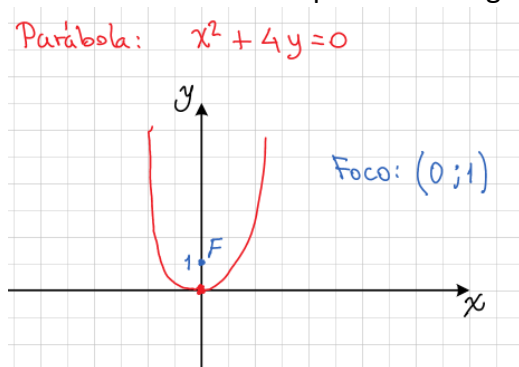
c) ¿Cuál es la cónica que corresponde a la siguiente ecuación: $8(y - 1) = (x - 3)^2$?

7. Un docente tiene como propósito que sus estudiantes logren la comprensión de la ecuación de la parábola. ¿Cuál de las siguientes actividades es la más pertinente para lograr su propósito?

- Presentar a los estudiantes la forma general de la ecuación de la parábola $x^2 = 4py$ e indicar que el valor (+4) hace que se abra hacia arriba con eje focal en el eje y , además tiene vértice en el origen y “ p ” es la distancia del foco al vértice. Luego, mediante tabulación ubicar algunos puntos y finalmente trazar aproximadamente el lugar geométrico de la parábola.
- Presentar a los estudiantes la forma general de la ecuación de la parábola $x^2 = 4py$ e indicar que el valor (+4) hace que se abra hacia arriba con eje focal en el eje y , además tiene vértice en el origen y “ $p=1$ ” es la distancia del foco al vértice. Luego, despejando “ y ” y mediante tabulación ubicar algunos puntos y finalmente trazar aproximadamente el lugar geométrico de la parábola.
- Presentar al estudiante un modelo elaborado donde se aprecie la definición del lugar geométrico de la parábola, seguidamente proponer el caso de elaborar la ecuación de una parábola con vértice en el origen y el foco en el punto $(0; p)$ donde $p > 0$, luego orientarle para que construya la directriz de la parábola con su ecuación respectiva y aplique la definición de los puntos de la parábola como equidistantes del foco y de la línea directriz. Finalmente proponerle hallar la ecuación de una parábola con vértice $(0;0)$ y foco $(0;2)$ y otra con vértice en $(3;2)$ y foco $(3;6)$

8. Un docente propone a los estudiantes construir aproximadamente la gráfica de una parábola cuya ecuación es $x^2 + 4y = 0$, resaltando algunos puntos específicos notables a través de análisis de la ecuación.

Uno de los estudiantes presentó el siguiente gráfico:



¿Cuál es el error o errores en que ha incurrido el estudiante?

- No presentó la forma general de la ecuación de la parábola para determinar su orientación y no identificó algunos puntos de referencia mediante la tabulación o el análisis de la forma de la ecuación.
- Se equivocó al graficar la parábola abierta hacia arriba.
- No determinó algunos puntos específicos que se obtienen al analizar la forma de la ecuación.

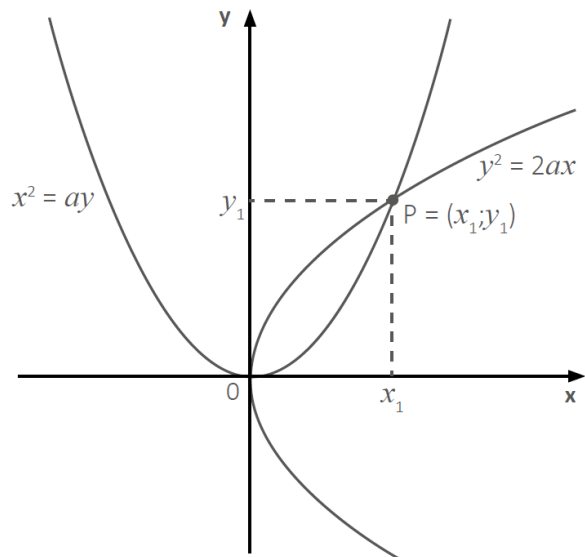
9. ¿Cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?

- a) En la ecuación de la parábola $(x - 3)^2 = 12(y - 2)$ identificar y escribir las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la recta directriz de la parábola.
- b) En la ecuación de la parábola $x^2 - 6x - 3ny + 25 = 0$, halla el valor de n para que tenga como foco al par ordenado $(3; 5)$ y escribe la ecuación de la directriz.
- c) En la ecuación $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$ con foco en el punto $(3; 5)$, halla la ecuación de la directriz.

10. Al intersecar dos parábolas se puede conocer la longitud de la arista de un cubo que resulta de duplicar el volumen de otro.

Sea "a" la longitud de la arista del cubo cuyo volumen se desea duplicar. Además, la intersección de la parábola $x^2 = ay$ y de la parábola $y^2 = 2ax$ determina un punto $P(x_1; y_1)$, en el cual la abscisa x_1 corresponde a la longitud de la arista del cubo que tendrá el volumen duplicado.

La siguiente imagen representa la intersección de la parábola $x^2 = ay$ y de la parábola $y^2 = 2ax$.



Si se desea duplicar el volumen de un cubo de 64 u^3 , ¿cuáles son las ecuaciones de las parábolas que se deberán intersecar?

- a) $x^2 = 4y$; $y^2 = 8x$
- b) $x^2 = 8y$; $y^2 = 16x$
- c) $x^2 = 64y$; $y^2 = 128x$