MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

Miscelánea 2

1. Un docente propone la siguiente situación a los estudiantes de primer grado.

   Como parte de un tratamiento, a las 8:00 horas una persona recibió una primera dosis de penicilina de 300 miligramos. A partir de entonces, su cuerpo elimina gradualmente la penicilina, de modo que una hora después solo el 60 % de la cantidad de penicilina inicial permanece activo en su sangre. Esta pauta continúa de tal manera que, al final de cada hora, solo permanece activo el 60 % de la penicilina que tuvo al inicio de esa hora.

   A partir de la situación anterior, el docente propone tres tareas. ¿Cuál de estas tareas es de **mayor** demanda cognitiva?

   a) Hallar en qué porcentaje disminuyó la cantidad de penicilina que permanece activa en la sangre de esta persona dos horas después de la aplicación de la primera dosis.
   b) Completar una tabla que muestre la cantidad de penicilina que permanecerá activa en la sangre de esta persona en intervalos de una hora desde el momento de la primera dosis hasta las 11:00 horas.
   c) Determinar la hora en que se debe administrar la segunda dosis si se sabe que esta se debe suministrar cuando la penicilina activa en la sangre descienda a un valor cercano a la doceava parte de la primera dosis.

2. En una sesión de aprendizaje, los estudiantes resuelven problemas que involucran tasas de interés simple, como el que aparece a continuación:

   Hallar el interés producido durante 5 años por un capital de S/ 30 000 colocado a una tasa de interés simple anual del 6 %.

   Lila, una estudiante, explica su procedimiento de la siguiente manera: “Para calcular el interés solicitado, debo multiplicar el capital que es 30 000 soles por la tasa de interés que es igual a 6 y por el tiempo que es igual a 5. De esta operación, se obtiene que el interés producido es igual a 900 000 soles”.

   ¿Cuál de las siguientes acciones docentes es pertinente para brindar retroalimentación a Lila, de modo que logre superar el error que se evidencia en su procedimiento?

   a) En el diálogo con ella, enfatizar que la tasa de interés debe expresarse en notación fraccionaria.
   b) Preguntar: “¿La tasa de interés indica que por cada sol de capital se produce una ganancia de 6 soles al año?”.
   c) Preguntar: “¿La tasa de interés es mensual o anual?, ¿la tasa indicada se aplica a todo el monto de capital o solo a una parte?”.

3. Una docente diseñará actividades con el propósito de que los estudiantes **inicien** la comprensión de la adición de números enteros.

   ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es la **más** recomendable para el logro de ese propósito?

   a) Orientarlos para que en la recta numérica ubiquen un punto asociado al valor del primer sumando. Luego, pedirles que en la recta se desplacen a la derecha si es positivo o a la izquierda si es negativo tantos espacios como unidades presente el segundo sumando. La posición final representará la ubicación del resultado o suma. Después, solicitar que, en grupos, resuelvan diversas adiciones para reforzar ese aprendizaje.
   b) Formar grupos y ejemplificar los siguientes casos: si los dos números son negativos, se sumarán como si fueran números naturales y el resultado será también un número negativo. Cuando un

sumando sea positivo y el otro negativo, se restarán los respectivos valores absolutos y el resultado tendrá el signo del número con mayor valor absoluto. Luego, plantear ejercicios de consolidación. Finalmente, para verificar su aprendizaje, solicitar que expliquen el proceso realizado.

c) Entregarles tarjetas azules y rojas. Cada tarjeta azul representa una unidad positiva y cada roja, una unidad negativa. Proponerles una adición de dos números enteros y pedirles que escojan las respectivas cantidades de cada color. Establecer que una tarjeta se anula con otra de distinto color al juntarlas. Si eso ocurre, ambas deben ser retiradas. Según la cantidad y color de tarjetas que quedan, expresar el resultado como un número entero. Proponer otras adiciones y pedirles que expliquen el sentido del proceso.

4. Una docente pidió a los estudiantes de tercer grado expresar qué comprenden por la potenciación con números racionales. Uno de los estudiantes afirmó lo siguiente:

"La potenciación es una operación que consiste en multiplicar la base tantas veces como indica el exponente. Por ejemplo, para calcular dos elevado al cubo, multiplicamos 2 por 2 por 2. Es decir, la base 2 se repite como factor tres veces".

¿Cuál de las siguientes preguntas favorece la generación del conflicto cognitivo en este estudiante?

a) ¿Cómo explicarías la potenciación si tuvieras un número negativo, por ejemplo –3, en lugar del número que has propuesto como exponente?
b) ¿Cuál sería el resultado de la potenciación si en lugar del exponente que has propuesto tuvieras un número de dos cifras, por ejemplo 20?
c) ¿Qué sucedería si tuvieras un número negativo, por ejemplo –2, en lugar del número que has propuesto como base?

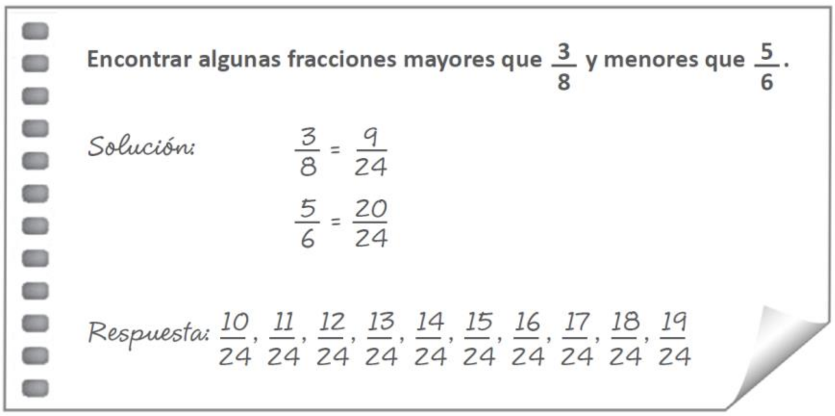
5. En la primera sesión de aprendizaje, para desarrollar la comprensión de la densidad en el conjunto de los números racionales, los estudiantes de segundo grado han resuelto tareas como esta:

Encontrar algunas fracciones mayores que $\frac{1}{7}$ y menores que $\frac{6}{7}$.

Sin embargo, presentaron dificultades para resolver tareas como la siguiente:

Encontrar algunas fracciones mayores que $\frac{4}{6}$ y menores que $\frac{5}{6}$.

Para abordar esta dificultad, el docente les propuso buscar fracciones equivalentes a las dadas. Al efectuarla, obtuvieron 8/12 y 10/12. Entonces, reconocieron que enfrentaban una situación conocida y dieron como respuesta 9/12. Luego, en una situación similar, los estudiantes aplicaron el mismo procedimiento, tal como se muestra a continuación.



Al afrontar estas tareas, la mayoría de estudiantes concluyó que siempre es posible encontrar otras fracciones entre 2 fracciones dadas. Esto representa un logro aún limitado.

¿Cuál es la **principal** limitación que se ha evidenciado en la actividad de los estudiantes respecto de la comprensión de la densidad en el conjunto de los números racionales?

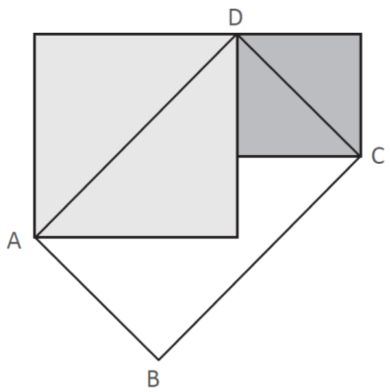
a) Haber encontrado una cantidad finita de números entre dos números dados, sin llegar a desarrollar la cualidad de infinitud del intervalo cuyos extremos son esos números.
b) Haberse limitado al uso de fracciones sin incluir a los números decimales; de este modo, no se llega a analizar la densidad en el conjunto de números racionales.
c) Haber prescindido de desarrollar la semisuma de dos números dados como un procedimiento eficaz para encontrar un número racional comprendido entre otros dos cualesquiera.

6. Pablo dispone de una receta para 8 porciones de ají de gallina que, entre otros ingredientes, recomienda utilizar 1/3 de taza de ají amarillo. Él ha decidido preparar solo 2 porciones de este plato y, para medir la cantidad conveniente de cada ingrediente, dispone de un juego de 4 tazas medidoras cuyas capacidades corresponden a 1 taza, 1/4, 1/3 y 1/2 de taza, respectivamente.

   ¿Con cuál de las siguientes acciones Pablo puede obtener la cantidad correspondiente de ají amarillo para preparar las 2 porciones?

   a) Primero llenar 1/2 de taza y luego quitar 1/3 de taza. Repetir este proceso dos veces.
   b) Primero llenar 1/3 de taza y luego quitar 1/4 de taza.
   c) Primero llenar 1 taza y luego quitar 1/3 de taza.

7. El rectángulo ABCD ha sido construido a partir de las diagonales de dos cuadrados. Si el lado de uno de los cuadrados mide 3,5 u y el lado del otro mide 2,5 u, ¿cuál es la medida de la diagonal del rectángulo ABCD?



a) $\sqrt{74}$ u
b) $\sqrt{37}$ u
c) $\sqrt{24}$ u

8. Después de realizar actividades con los estudiantes de segundo grado sobre la determinación del término siguiente en una secuencia, una docente busca que ellos desarrollen sus habilidades de generalización para que determinen el término enésimo en una secuencia numérica. Para esto, ella toma como referencia la siguiente situación:

María decidió ahorrar para comprar un regalo. Asume que depositará algunas monedas en una alcancía todas las noches. Si ella ahorra 5 soles el primer día y cada día posterior deposita 3 soles, ¿cuánto dinero en total tendrá ahorrado en *"n"* días?

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para el logro del propósito de la docente?

a) Solicitar que identifiquen el dinero con que empezó en la etapa de ahorro y el aumento constante que ocurre cada día posterior. Luego, explicar cómo calcular lo ahorrado en 10 días, en 15 o en 20 días. Indicarles que, de manera similar, se puede obtener la cantidad de dinero ahorrado durante cierta cantidad de días simbolizada por la variable *"n"*. Luego, introducir y explicar el significado de cada elemento de la expresión general $A = 5 + 3(n - 1)$.

b) Pedir que indiquen la cantidad ahorrada el primer día, así como las cantidades de dinero depositadas a partir del segundo día. Preguntar por la relación entre la cantidad de veces que se deposita los 3 soles con el número de días que lleva ahorrando. Luego, pedir que utilicen sus hallazgos para expresar la cantidad total de dinero en función de la cantidad *"n"* de días ahorrados. Solicitar que verifiquen si funciona la expresión hallada para los casos ya conocidos y otros nuevos.

c) Señalar que es conveniente hacer uso de una expresión general que se puede aplicar para cualquier valor aceptable de *"n"*. Esto permite introducir una expresión para calcular el término enésimo de una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n - 1)r$, en la que se puede reemplazar "a1" por la cantidad ahorrada en el primer día y *"r"* por la cantidad constante ahorrada a partir del segundo día. El dinero total ahorrado, generalizado para *"n"* días, resultará ser el valor obtenido para a_n.

9. Una docente ha seleccionado tres tareas que involucran ecuaciones lineales.

I. A las 15:00 h, el auto P y el auto Q distan entre sí 280 km a lo largo de una carretera. Estos autos se dirigen el uno hacia el otro con velocidades constantes de 30 km/h y 40 km/h, respectivamente. ¿A qué hora se encontrarán?

II. Dadas las siguientes relaciones definidas en el conjunto de números enteros:
$a + 10b = 40$
$23c - 4d = 11$
$13e + 6f = 136$

Obtén una solución de $[a+b-(c\times d)]^{\frac{e}{f}}$.

III. Una impresora utiliza tres cartuchos con igual capacidad de tinta negra, roja y azul. Por intensidad de uso, los cartuchos de tinta negra se cambian el cuádruple de veces que los de tinta roja. A su vez, en el tiempo en que se acaban 3 cartuchos de tinta roja, se agotan 5 de color azul. Al contar todos los cartuchos utilizados, se obtuvo 200. ¿Cuántos cartuchos fueron de color azul?

¿Cuál de las tareas es de mayor demanda cognitiva?

a) La tarea I.
b) La tarea II.
c) La tarea III.

10. Un docente presentó a sus estudiantes el siguiente problema:

¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $(x + 3)^2 = 144$, sabiendo que $x \in Q$?

Un estudiante respondió que si extrae la raíz cuadrada a ambos miembros obtiene la ecuación x + 3 = 12 y, por tanto, el C.S. = {9}.

¿Cuál de las siguientes preguntas es pertinente para generar conflicto cognitivo en el estudiante?

a) Si reemplazas en la ecuación la variable “x” por -15, ¿se verifica la igualdad?¿-15 también será parte del conjunto solución? ¿9 será el único valor que cumple la igualdad?
b) Si revisas tu procedimiento, ¿cómo obtuviste la ecuación x + 3 = 12? ¿Podrías explicar cómo obtuviste 9 en el conjunto solución? ¿Será correcto el resultado que has encontrado?
c) Si comparas una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, ¿qué características tienen en común? ¿Cuál es el grado en cada ecuación? ¿Qué se entiende por ecuación lineal y por ecuación cuadrática?

11. Observe la resolución de una ecuación cuadrática realizada por un estudiante.

Resuelve lo siguiente: $15 - 3x = (x + 5)(x - 5) + 40$

Resolución:

$$15 - 3x = x^2 - 5x + 5x - 25 + 40$$
$$15 - 3x = x^2 + 15$$
$$15 - 3x - 15 = x^2$$
$$-3x = x^2$$
$$-5 = \frac{x^2}{x}$$
$$-5 = x$$
$$x = 5$$

El procedimiento seguido muestra errores. ¿Cuál es el principal error que se evidencia en la resolución del estudiante?

a) Incurre en un error de transcripción al reemplazar –3 por –5, que lo conduce a un resultado erróneo.
b) Opera la incógnita como si fuera una constante y no considera todos los posibles valores que puede tomar.
c) Prescinde del signo negativo en el resultado final, posiblemente por asociarlo al cambio de signo de un número que se traslada de un miembro a otro.

[redacted]

Una docente presenta la siguiente situación a los estudiantes de tercer grado.
En cierto taller de confecciones, se producen “x” buzos deportivos con un costo total de “200 + 5x” soles. Se ha establecido que el precio de venta de cada buzo deportivo sea “225 – 5x” soles. ¿Cuántos buzos deportivos deberán venderse para que la ganancia sea 1500 soles?

12. La docente pide a los estudiantes que expresen la situación propuesta mediante una ecuación.

¿Cuál de los siguientes indicadores de evaluación se corresponde con lo solicitado por la docente?

a) Expresa lo que comprende sobre el significado de ecuaciones cuadráticas.
b) Describe el procedimiento realizado para resolver ecuaciones cuadráticas.
c) Representa simbólicamente situaciones empleando ecuaciones cuadráticas.

13. La docente tiene como propósito que los estudiantes obtengan e interpreten la respuesta que resuelve la situación. Para evaluar el desempeño, ha elaborado una rúbrica con las descripciones de los niveles “En inicio”, “En proceso” y “Satisfactorio”.

En inicio	En proceso	Satisfactorio
Expresa correctamente alguna relación entre datos y variables tomados de la situación propuesta.	Expresa una representación simbólica que modela correctamente la situación y presenta un avance parcial del procedimiento de resolución de la ecuación.	Expresa correctamente la representación simbólica que modela la situación, resuelve la ecuación e interpreta el conjunto solución en el contexto de la situación propuesta.

Un estudiante presenta la siguiente resolución como respuesta al problema.

x: cantidad de buzos deportivos

$$(225 - 5x)x - (200 + 5x) = 1500$$
$$225x - 5x^2 - 200 - 5x = 1500$$
$$-5x^2 + 220x - 1700 = 0$$
$$5x^2 - 220x + 1700 = 0$$
$$x^2 - 44x + 340 = 0$$
$$(x - 34)(x - 10) = 0$$

Considerando la rúbrica presentada, ¿cuál es el nivel de logro alcanzado por el estudiante?

a) En inicio.
b) En proceso.
c) Satisfactorio.

14. Un docente tiene como propósito que los estudiantes de tercer grado consoliden el concepto de función exponencial. Para esto, les presenta el siguiente problema:

> Tres amigos deben emprender un proyecto orientado a ayudar a otras personas. En este proyecto, cada participante ayudará durante una semana a 2 personas que no la hayan recibido anteriormente, con la promesa de que tales personas ayuden a otras 2 durante el mismo tiempo. Esta ayuda la brindarán inmediatamente después de que la hayan recibido.
>
> Si los tres amigos comienzan con dicho proyecto y este se cumpliese de manera ideal, expresa simbólicamente la función que permita calcular la cantidad de personas que recibirán ayuda en una determinada semana.

Luego de facilitar la comprensión del problema, el docente otorgó cierto tiempo para su resolución. En ese proceso, un estudiante respondió: “Se trata de la función cuadrática $f(x) = 3x^2$, ya que en la segunda semana se cumple que son 12 personas quienes reciben la ayuda”.

¿Qué grupo de preguntas es más pertinente para brindar retroalimentación al estudiante, de modo que reflexione sobre su error?

a) ¿Por qué no usaste un diagrama de árbol para hallar las cantidades durante las 3 primeras semanas? ¿Has verificado si coinciden con las respuestas para la semana 1 y la 3? Luego, indicarle que, por no coincidir los resultados, debe cambiar la función cuadrática por una función exponencial cuya base y coeficiente puede hallar.
b) ¿Cuántas personas empezarán haciendo los favores y por cuánto tiempo? ¿La cantidad de personas crece o decrece por cada semana transcurrida? ¿La función cuadrática es siempre

creciente? ¿Has verificado si la cantidad de personas que reciben ayuda en la segunda semana se obtiene con la función que diste como respuesta?

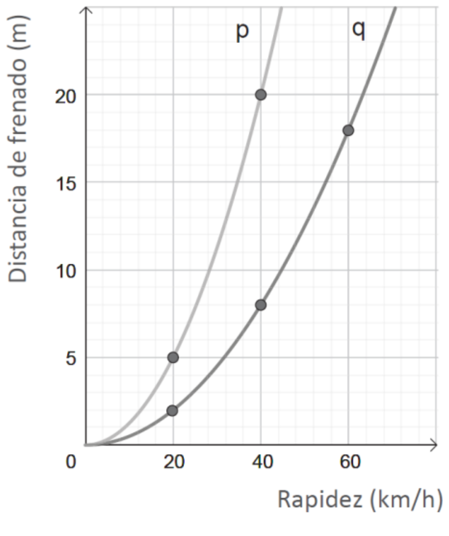
c) Si el proyecto lo empieza solo uno de los amigos, ¿cómo variaría semana a semana la cantidad de personas que reciben ayuda? ¿Cómo se expresarían esas cantidades mediante una multiplicación de un factor que se repite? ¿Qué relación habría entre las veces que se repite el factor y la cantidad de semanas transcurridas? ¿Cómo sería si fuesen 3 personas quienes inician el proyecto?

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 68 y 69.

Las funciones cuadráticas tienen muchas aplicaciones. Por ejemplo, sirven para modelar la distancia que recorre un auto desde el instante en que se pisa el freno hasta que se detiene (distancia de frenado en metros) en función de su rapidez (en kilómetros por hora) cuando su sistema de frenos está en óptimas condiciones. En esta situación, la fórmula que permite calcular la distancia de frenado es la siguiente:

$$d = k\left(\frac{v}{10}\right)^2$$

En la fórmula, "d" es el valor numérico de la distancia de frenado, "v" es el valor numérico de la rapidez y "k" es un factor que considera si la vía está seca o mojada. A continuación, se muestra la gráfica de dos funciones, **p** y **q**, que modelan dicha distancia de frenado.



15. A partir de lo presentado, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
    a) La función **p** tiene un factor "k", que se refiere a las condiciones de la vía, cuyo valor es menor que el factor "k" de la función **q**.
    b) La función **p** corresponde a la distancia de frenado cuando la vía está mojada, mientras que la función **q** corresponde a dicha distancia cuando la vía está seca.
    c) La función **q** corresponde a la distancia de frenado cuando la rapidez del vehículo va a ser mayor que 50 km/h, mientras que la función **p** cuando va a ser menor que 50 km/h.

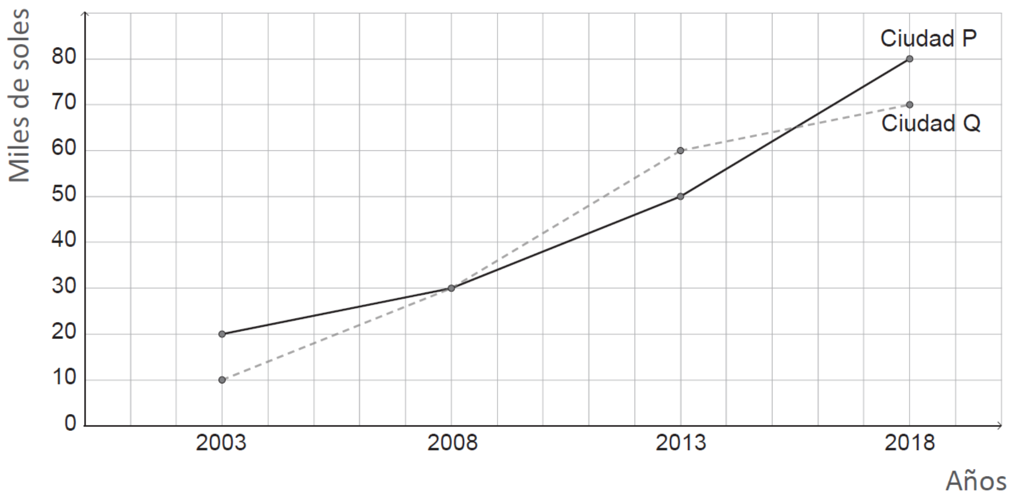
16. Si se asume que se trata de una situación modelada por la **función q**, ¿qué sucedería si el conductor de un automóvil, que se traslada a 80 km/h, inicia el frenado al detectar un objeto 35 m delante de su vehículo?
   a) El automóvil impactaría con el objeto, ya que se necesitaría mayor distancia para detener completamente el vehículo.
   b) El automóvil lograría detenerse unos metros antes de impactar con el objeto, ya que 35 m es suficiente para conseguirlo.
   c) El automóvil se detendría justo a punto de colisionar con el objeto, ya que al ir a 80 km/h requiere de 35 m para detenerse completamente.

17. Luego de un periodo de observación de la presencia de cierto insecto en una zona forestal protegida, un biólogo planteó como conjetura que la cantidad de dichos insectos observados es directamente proporcional al cuadrado del valor entero positivo de la temperatura. Además, él registró un caso particular: cuando la temperatura era 20 °C, la cantidad de insectos observados fue 80.

   De acuerdo con la conjetura propuesta, ¿con qué expresión se puede calcular la cantidad "N" de insectos observados para un valor "T" de la temperatura?

   a) $N = \frac{1}{5}(T)^2$
   b) $N = 400(T)^2$
   c) $N = \frac{(80)(20)^2}{T^2}$

18. El siguiente gráfico muestra la evolución de precios de un departamento de 80 m2 en dos ciudades P y Q. Para ello, se establecen periodos de 5 años a partir de 2003.



   Respecto del gráfico anterior, ¿cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?

   a) ¿Cuánto fue, aproximadamente, el precio del departamento de 80 m^2 en el año 2010 en la ciudad P?, ¿y en la ciudad Q?
   b) ¿En qué años fue superior el precio del departamento de 80 m^2 en la ciudad Q respecto del precio en la ciudad P?
   c) ¿Durante qué periodo aumentó con mayor rapidez el precio del departamento de 80 m^2 en la ciudad Q?

19. Durante una reunión de docentes de Matemática de una IE, como parte de una lluvia de ideas para evaluar la comprensión de las medidas de tendencia central, uno de los participantes dijo: “Con respecto a la media aritmética, yo formularía las siguientes preguntas: ¿cómo definirías la media aritmética?, ¿cómo explicarías el uso de la fórmula para calcular la media aritmética? Y ¿cuáles son las principales propiedades de la media aritmética?”.

    Si el propósito es evaluar la comprensión de la media aritmética, ¿por qué NO son pertinentes las preguntas planteadas por el docente?

    a) Porque las preguntas debieron centrarse en reconocer el significado de esta medida en diversas situaciones y explorar a qué tipo de variable se puede aplicar, o en qué casos la media o promedio pierde representatividad.
    b) Porque las preguntas sobre aspectos teóricos debieron complementarse con tareas de aplicación de la media que permitan al estudiante resolver correctamente situaciones como el cálculo de un promedio de notas, de tallas o de pesos, de manera que el docente pueda identificar si el estudiante logró o no el dominio del algoritmo.
    c) Porque solo menciona las principales propiedades cuando debió profundizar sobre cada una de ellas mediante preguntas como las siguientes: “Si a cada valor de la variable se le suma un mismo número, ¿qué pasa con la media? O ¿a cuánto es igual la suma de las desviaciones de todas las puntuaciones de una distribución respecto de la media?”.

20. Un docente tiene como propósito que los estudiantes comprendan la noción de desviación estándar. ¿Cuál de las siguientes tareas es más pertinente para ello?
    a) Presentarles un caso en el que se han anotado los sueldos de los trabajadores de una empresa y su respectiva media, y explicarles que, para definir la desviación estándar, es mejor empezar por la varianza, ya que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.
    b) Pedirles que resuelvan un problema en el cual se brinda como datos las estaturas de los cinco jugadores de un equipo de básquet, y se pregunta por la media de dichas estaturas y por el valor de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las diferencias de cada estatura respecto de su media.
    c) Proponerles una situación en la que se han registrado las masas de un conjunto de productos salidos de una línea de producción, las cuales deben cumplir con un valor promedio requerido. Luego, preguntarles por qué es necesario conocer la variabilidad de estas masas respecto de este valor.