SOLUCIONARIO:
MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

Temas: Miscelánea de problemas de competencias 1 y 2.

1. Con el propósito de promover la comprensión de los porcentajes, un docente presenta a los estudiantes el siguiente problema:

En nuestro planeta, hay alrededor de 1400 millones de kilómetros cúbicos de agua. De estos, el 2,5 % es agua dulce. A su vez, solo el 1 % del agua dulce está en las cuencas hidrográficas en forma de arroyos y ríos. ¿Cuántos kilómetros cúbicos de agua dulce hay en las cuencas hidrográficas? Explica tu procedimiento.

Un estudiante explica su procedimiento de resolución:

Sumamos los porcentajes: 2,5 % + 1 % = 3,5 %
Entonces, el agua dulce que hay en las cuencas hidrográficas es:
3,5 % × 1400 millones de kilómetros cúbicos = 49 millones de kilómetros cúbicos

¿Cuál de las siguientes acciones de retroalimentación es **<u>más</u>** pertinente para que el estudiante reflexione sobre su error?

a) Sugerirle que primero debe determinar la cantidad de agua dulce que hay en el planeta, efectuando: 2,5 % × 1400 millones. Luego, preguntarle por el resultado del 1 % de esa cantidad y qué se concluye.

b) Proponerle que encuentre la cantidad de agua dulce que hay en el planeta y preguntarle a qué cantidad se aplica el 1 % indicado. Luego, preguntarle si ambos porcentajes se aplican a la misma cantidad y si está bien sumarlos.

c) Pedirle que asuma que la cantidad total de agua en el planeta es 100 kilómetros cúbicos y que halle la cantidad de agua dulce. Luego, usando la cantidad hallada, pedirle que obtenga el 1 % de dicha cantidad y que revise su respuesta.

2. Durante la preparación de una sesión de aprendizaje, un docente decidió utilizar los resultados de una encuesta hecha a 25 estudiantes de primer grado acerca de la cantidad de frutas que diariamente consume cada uno.
La siguiente tabla presenta los resultados de la encuesta.

Cantidad de frutas consumidas	Cantidad de estudiantes
0	6
1	8
2	5
3	4
4	1
5	1

A partir de los resultados de esta encuesta, el docente quiere formular una pregunta para recoger información acerca del indicador de evaluación "Emplea estrategias de cálculo para resolver problemas que involucran operaciones con expresiones porcentuales".

¿Cuál de las siguientes preguntas es **<u>más</u>** pertinente para recoger información de dicho indicador?

a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes son los que comen a diario más de 3 frutas?

b) Con respecto de los que sí consumen frutas, ¿qué porcentaje constituye aquellos que comen a diario únicamente 1 fruta?

c) La cantidad de estudiantes que consumen a diario una o más frutas, ¿en cuántos puntos porcentuales supera a la cantidad que no la consumen?

3. Un docente tiene como propósito que los estudiantes resuelvan problemas que involucran propiedades de los números naturales. En ese marco, les presenta el siguiente problema:

Dos hermanos, Rosa y Julio, recibieron de sus padres una pista de carrera para autos de juguete. Esta pista es cerrada y los carriles tienen la misma longitud. Al medir los tiempos, se obtuvo que el auto de Rosa demora 36 segundos en dar una vuelta y que el de Julio demora 42 segundos. Si los dos autos partieron en el mismo instante y en cada vuelta emplean los respectivos tiempos indicados, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que coincidan nuevamente en el punto de partida?

Tres estudiantes indicaron cómo resolver el problema. ¿Quién lo hizo de forma correcta?

a) Angélica dijo: “Como los autos demoran 36 segundos y 42 segundos, entonces el tiempo en que coincidan será aquel que contiene, a la vez, un número exacto de veces a dichos tiempos”.

b) Beatriz dijo: “Para calcular el tiempo, colocamos a 36 y 42 encabezando dos columnas; luego, trazamos una línea vertical a la derecha y extraemos los factores comunes. Al multiplicarlos, tendremos el resultado”.

$\frac{252}{36} = 7$

$\frac{252}{42} = 6$

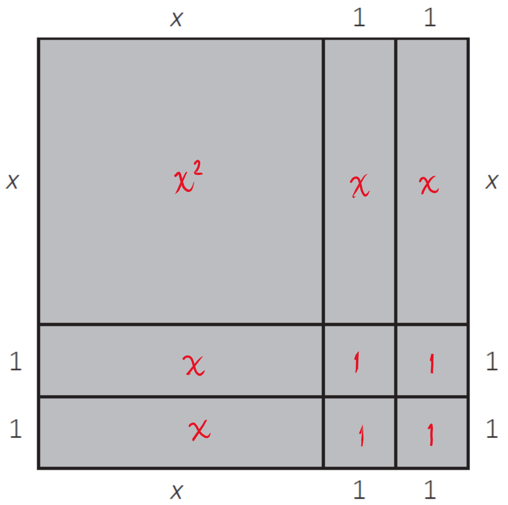
36	42	2
18	21	2
9	21	3
3	7	3
1	7	7
	1	

MCM = 252

Otros múltiplos: 504, 756, ...

c) César dijo: “No creo que vuelvan a coincidir en algún momento, ya que al dar una vuelta la diferencia de sus tiempos es 6 segundos; en dos vueltas, es 12 segundos y, así, siempre irán distanciándose en cada vuelta que den”.

4. Durante el desarrollo de una actividad, un docente entregó a los estudiantes 9 piezas de un rompecabezas y les pidió que armaran un cuadrado. Una vez realizado, él asignó las medidas de los lados de las piezas como se aprecia en la siguiente figura:



Lado = $x + 2$

Área = $(x+2)^2$

Área = $x^2 + 4x + 4$

Luego, el docente les solicitó a los estudiantes lo siguiente:

- Calculen las áreas de cada una de las piezas y súmenlas para determinar la expresión que representa el área total de la figura formada.
- Determinen la medida del lado del cuadrado formado y con este valor expresen el área de dicho cuadrado.
- Respondan: ¿Qué se puede afirmar de ambas expresiones?

¿Cuál es el propósito principal de la actividad?

a) Que los estudiantes resuelvan operaciones multiplicativas con expresiones algebraicas.

b) Que los estudiantes establezcan relaciones entre las distintas expresiones algebraicas del área de una figura geométrica.

c) Que los estudiantes desarrollen su habilidad de visualización geométrica estableciendo relaciones entre las partes y el todo.

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 5 y 6.

En una IE, algunos estudiantes deciden emprender un negocio de dulces de chocolate con relleno de diferentes sabores, los cuales serán vendidos en cajas. Los estudiantes se distribuyen para realizar una de las siguientes labores: elaboración, empaquetado y venta de dulces.

5. Durante el primer mes de venta, Miguel y Noelia se encargaron de vender estos dulces en los colegios cercanos al suyo.
A Miguel le entregaron 3/5 del total de cajas y a Noelia el resto. Miguel solo vendió la mitad de la cantidad de cajas que le dieron y Noelia, la cuarta parte.
Si Noelia debe vender la misma cantidad de cajas que vendió Miguel, ¿qué fracción de lo que le queda a ella debe vender?

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

Total de cajas: x

Miguel recibe: $\frac{3}{5}x \longrightarrow$ vende: $\frac{1}{2}\frac{3}{5}x = \frac{3}{10}x$

Noelia recibe: $\frac{2}{5}x \longrightarrow$ vende $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{10}x \longrightarrow$ Le queda: $\frac{2}{5}x - \frac{1}{10}x = \frac{3}{10}x$

Para igualar a Miguel, debe vender $\frac{2}{10}x = \frac{1}{5}x$ más.

La fracción es: $\dfrac{\frac{1}{5}x}{\frac{3}{10}x} = \frac{2}{3}$

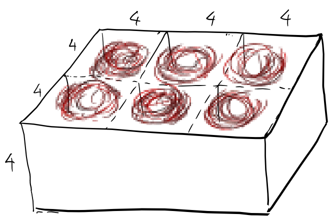
Cant. de cajas: x

	Reciben	Venden	(Le queda) Falta vender
Miguel	$\frac{3}{5}x$	$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x\right) = \frac{3}{10}x$	
Noelia	$\frac{2}{5}x$	$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{10}x$	$\frac{2}{5}x - \frac{1}{10}x = \frac{3}{10}x$

A Noelia, para igualar a Miguel debe vender: $\frac{3}{10}x - \frac{1}{10}x = \frac{2}{10}x$

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Parte de interés}}{\text{Todo de referencia}} = \frac{\frac{2}{10}x}{\frac{3}{10}x} = \frac{2}{3}$$

6. Los dulces de chocolate son de forma esférica, cada uno mide 4 cm de diámetro y serán colocados en cajas cuyas medidas son 12 cm, 8 cm y 4 cm. Se desea saber qué cantidad de dulces como máximo caben en cada caja. Para ello, uno de los estudiantes realiza los siguientes cálculos:



Volumen de una casilla que ocupa la esfera $= 4^3$

$$\text{Cantidad de chocolates esferizos} = \frac{\cancel{12}^{3} \times \cancel{8}^{2} \times \cancel{4}}{4 \times 4 \times 4} = 6$$

Volumen de la caja = 12 × 8 × 4

Volumen de la caja: $12 \times 8 \times 4 = 384 cm^3$

Volumen de cada dulce: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = 33{,}5\ cm^3$

$384 \div 33{,}5 = 11{,}46$

Luego afirma: "Cada caja podrá contener como máximo 12 dulces de chocolate".
A partir del registro del estudiante, ¿cuál de las siguientes alternativas expresa el error en el que incurre el estudiante?

a) Considerar que la cantidad de dulces en cada caja se determina al dividir el volumen de la caja entre el volumen de cada dulce.
b) Considerar que la cantidad de dulces de chocolate se obtiene al aproximar el cociente al siguiente número entero.
c) Considerar solo una cifra decimal en el divisor al realizar la división.

7. Durante una sesión de aprendizaje, una docente plantea a sus estudiantes la siguiente situación:
"En una familia, los padres han decidido incentivar el ahorro en sus hijos. Para esto, han destinado un monto total de 300 soles que distribuirán entre sus hijos en proporción a sus edades. Si se sabe que Adela tiene 8 años, Berenice 10 años y Carlo 12 años, ¿cuánto recibirá cada uno?".
Al monitorear a los estudiantes, ella observa que un grupo resolvió el problema de la siguiente manera:

Solución:
Dividiendo el monto total de dinero entre la cantidad de hijos: 300 ÷ 3, se obtiene 100.
Luego, con la ayuda de la siguiente tabla se hace la distribución del dinero.

Constante de reparto	Adela	Berenice	Carlo	Monto total
10 (promedio de 8, 10 y 12)	100 - 10 = 90	100	100 + 10 = 110	90 + 100 + 110 = 300

Respuesta:
Adela: 90 soles.
Berenice: 100 soles.
Carlo: 110 soles.

$8K + 10K + 12K = 300$

$K = 10$

80 100 120

¿Cuál de las siguientes acciones de retroalimentación es **más** pertinente para que los estudiantes de este grupo reflexionen sobre su error?

a) Preguntar: "¿Cuánta es la cantidad total a distribuir?, ¿en cuántas partes debe repartirse? ¿En cuánto se diferencian las edades de los hijos? ¿Cuánto más recibirá el hijo mayor Carlo que la hija menor Adela?". Luego, indicar que intenten resolverlo colaborativamente con sus compañeros y, finalmente, que expongan su respuesta.
b) Preguntar: "¿Cuánto se repartiría a cada hijo si se entrega 1 sol por cada año de edad? ¿Cuántas veces se repetirá este reparto hasta agotar los 300 soles? ¿Cuántos soles recibirá en total cada hijo? En su procedimiento, ¿tiene sentido utilizar el promedio de las edades? ¿Bastará con que la suma de lo recibido por los tres sea 300 soles para resolver el problema?".

c) Pedir que hagan una lectura comprensiva del problema. Luego, preguntar: "¿Cuáles son los datos que se deben reemplazar en la siguiente proporción para que se cumpla la distribución indicada? ¿Cuál es la incógnita?".

$$\frac{\text{Monto que recibe cada hijo}}{\text{Edad de cada hijo}} = \frac{\text{Monto total}}{\text{Suma de las edades de los hijos}}$$

Después, solicitar que hallen las respuestas y verifiquen si cumplen las condiciones establecidas.

Adela Bere Carlo

Recibe → Edad → $\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{8+10+12}$

$\frac{x}{8} = \frac{300}{30} \rightarrow x = 80$

8. Un docente pidió a los estudiantes que mencionen ejemplos de magnitudes proporcionales.

Tres de ellos dijeron lo siguiente:

Elizabeth: "La cantidad de líquido que se vierte en un cilindro recto y la altura del líquido en dicho recipiente".

Antonio: "El perímetro y el área de un polígono regular".

Mónica: "La edad de una persona y su masa".

¿Cuál de los estudiantes mencionó un ejemplo correcto de proporcionalidad?

a) Elizabeth
b) Antonio
c) Mónica

COMPARACIÓN DE MAGNITUDES

Magnitud: Es la propiedad o cualidad común a un conjunto de seres, objetos o entes, cuya intensidad es susceptible a una variación (aumentar o disminuir). Esta variación hace que pueda ser medido.

Así por ejemplo, tenemos que la LONGITUD es una MAGNITUD mientras que la longitud de un segmento es una cantidad, por ejemplo 30 cm. Esta cantidad es un valor particular de la magnitud LONGITUD. Se observan dos partes: valor numérico y la unidad de medida.

30 cm .
↓ valor numérico ↓ unidad de medida

Magnitudes proporcionales: Asumiremos que dos magnitudes son proporcionales cuando al variar una de ellas, también la otra varía en la misma proporción en forma directa o en forma inversa.

Magnitudes no proporcionales: Dos magnitudes relacionadas no son proporcionales cuando al variar una de ellas, la otra también varía, pero no en la misma proporción; es decir, si el valor de una de ellas es multiplicado por un número cualquiera, entonces el valor de la otra magnitud también varía, pero no queda multiplicado por el mismo número ni por su inverso.

A. Magnitudes directamente proporcionales (D.P.)

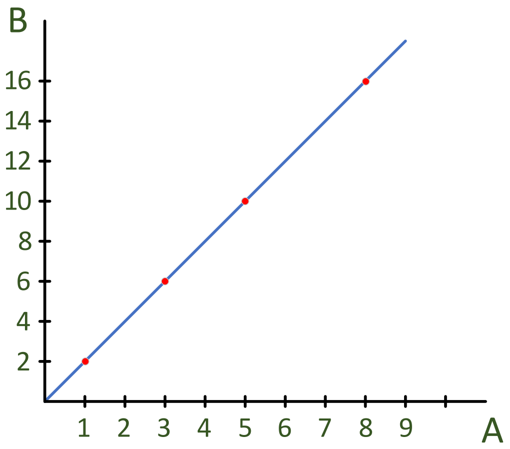
Definiremos que dos magnitudes A y B serán directamente proporcionales cuando al **aumentar** o **disminuir** los valores de una de ellas los valores de la otra también **aumentan** o **disminuyen** respectivamente en la misma proporción.

Esto significa que si tenemos las magnitudes "Cantidad de kg de azúcar" (A) y el dinero a invertir (B); al adquirir el triple de la cantidad de azúcar, se requerirá también el triple de dinero para adquirirlo, asimismo si la adquisición se reduce a la mitad, también el dinero a invertir será la mitad de lo previsto.

Kg de azúcar **(A)**	1	3	5	...
Inversión en soles **(B)**	2	6	10	...

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \ldots = \mathbf{0{,}5}$$

Constante de proporcionalidad directa.



Por lo tanto el **cociente** de los valores corresponden siempre a una misma constante denominada **constante de proporcionalidad directa.**

En general tenemos:

$$\boxed{A \text{ es D.P. a } B \Leftrightarrow \frac{A}{B} = k}$$

B) Magnitudes inversamente proporcionales (I.P.)

Definiremos que 2 magnitudes M y N serán inversamente proporcionales cuando al **aumentar** o **disminuir** los valores de una de ellas los valores de la otra **disminuyen** o **aumentan,** respectivamente en la misma proporción.

Examina la siguiente situación:

- Un auto recorre una distancia en 2 horas a la velocidad de 90 km/h.
- El mismo auto hará el mismo recorrido en 1 hora, si va a la velocidad de 180 km/h.

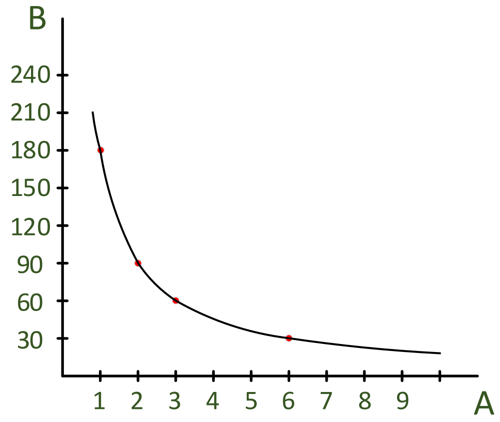
  El tiempo empleado varía de acuerdo con la velocidad del auto y mientras aumenta la velocidad, el tiempo empleado disminuye.
  Las magnitudes "velocidad" y "tiempo" varían en sentidos inversos en la misma proporción.

  Esta situación lo ilustramos así:

Velocidad en Km/h **(A)**	180	90	30	...
Tiempo en h **(B)**	1	2	6	...

De donde: $180\times1 = 90\times2 = 30\times6 = \ldots = \mathbf{180}$

Constante de proporcionalidad inversa.



Por lo tanto el **producto** de los valores corresponden siempre a una misma constante denominada **constante de proporcionalidad inversa.**

En general tenemos:

$$\boxed{A \text{ es I.P. a } B \Leftrightarrow A.B = k}$$

RELACIONES BÁSICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE REGLA DE TRES APLICANDO MAGNITUDES PROPORCIONALES

$$\boxed{\frac{\text{CAUSAS} \times \text{CIRCUNSTANCIAS}}{\text{EFECTOS}} = K}$$

$$\boxed{\text{CAUSAS} \times \text{CIRCUNSTANCIAS} = \text{EFECTOS}}$$

$$\boxed{\text{TODO} = \text{SUMA DE PARTES}}$$

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REGLA DE TRES COMPUESTA: CAUSAS – CIRCUNSTANCIAS – EFECTOS

Los problemas de regla de tres compuesta se pueden resolver por siguiente método de líneas o tijeras:

CAUSAS	CIRCUNSTANCIAS	EFECTOS
Personas **Animales** **Máquinas** *Rendimiento* *Eficiencia.*	**Tiempo**: horas, horas diarias, días, semanas, meses, etc.	**Cantidad de trabajo realizado:** Volumen, área, consumo, etc. Dificultad Producción Consumo

$$\frac{\text{Causas} \times \text{circunstancias}}{\text{efectos}} = K$$

PROBLEMAS SOBRE MAGNITUDES Y REGLA DE TRES

1. Las magnitudes P, Q y R, se relacionan de la siguiente manera: P es D. P. al cuadrado de Q e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de R. Cuando la raíz cuadrada de P es el doble de Q, entonces R vale 25. Cuando R = 16 y Q es menor que R con una diferencia de 6, entonces el valor de P es:

   A) 75,5 B) 80,75 C) 225,5 D) 250 E) 500

Magnitudes	Sit.1	Sit.2
P	$4Q^2$	x
Q	Q	10
R	25	16

I.P. DP d^2 √

$$\frac{P\sqrt{R}}{Q^2}=K \qquad K=\frac{4Q^2\sqrt{25}}{Q^2}=\frac{x\sqrt{16}}{10^2}$$

$$x=500$$

$$\sqrt{P}=2Q$$

$$P=4Q^2$$

2. Se tienen magnitudes A, B y C tales que A es D.P. a C e I.P. a $\sqrt{B}$. Si se sabe que cuando A = 10, B = 144 y C = 15, ¿cuál será el valor de A cuando $B = C^2$?

   A) 120 B) 96 C) 150 D) 8 E) 32

Magn.	Sit. 1	Sit. 2
A	10	x
B	144	C^2
C	15	C

$$\frac{A\sqrt{B}}{C}=K \qquad \frac{10\sqrt{144}}{15}=\frac{x\sqrt{C^2}}{C}$$

$$x=\frac{10(12)}{15}$$

$$x=8$$

3. Antes, José Luis comía tres veces, trabajaba 6 horas y dormía 8 horas diariamente. En su organismo se cumple que la cantidad de veces que come es I. P. a las horas de sueño y D. P. a las horas de trabajo. Si actualmente José Luis come 6 veces y duerme 6 horas diariamente, la cantidad de horas diarias que trabaja son:

   A) 4 h B) 2 h 25 min C) 9 h D) 6 h E) 8 h

Magn.	Antes	Ahora
Nº comidas "C"	3	6
Horas de sueño "S"	8	6
Horas de trabajo "T"	6	x

$$\frac{C.S}{T}=K \qquad \frac{3(8)}{6}=\frac{6(6)}{x}$$

$$x=9$$

4. El precio de una casa es D.P. al área e I.P. a la distancia de la ciudad de Trujillo. Si una casa ubicada a 75 km de Trujillo cuesta $ 45000, ¿Cuánto costará una casa del mismo material si su área es el doble y se encuentra a 100 km de Trujillo?

   A) $ 15000 B) $ 35000 C) $ 45000 D) $ 55000 E) $ 67500

5. Si en 21 días trabajando 5 h/d, 20 jardineros pueden sembrar un terreno cuadrado de 20 metros de lado, entonces el número de días de 8 h/d de trabajo que se demorarán en sembrar un terreno cuadrado de 40 metros de lado con una dureza 3 veces más que la del terreno anterior trabajando 30 jardineros doblemente hábiles es:

A) 70 B) 72 C) 74 D) 76 E) 78

$$\frac{\text{Causas} \times \text{Circunstancias}}{\text{efecto}} = K$$

Sit. 1 Sit. 2

$$\frac{20(1).\ (5)(21)}{20^2 . 1} = \frac{30(2).\ 8 . x}{40^2 . 4} \Rightarrow \quad x = //$$

OTRA FORMA

	CAUSAS		CIRCUNSTANCIAS		EFECTOS	
	Jardineros	hab	días	h/d	Area	Dureza
Sit. 1	20	1	21	5	20^2	1
Sit. 2	30	2	x	8	40^2	(1+3)

$$30 . 2 . x . 8 . 20^2 . 1 = 20 . 1 . 21 . 5 . 40^2 . 4$$

$x = //$

Causas circ. efecto (obra)

6. En el proyecto “A trabajar urbano” se establece que 18 obreros hacen en 20 días una vereda, pero al cabo de 8 días de trabajo se retiran 8 obreros y después de 6 días se contratan “x” obreros más para terminar la obra en el tiempo fijado. ¿Cuántos obreros trabajaron en el proyecto?

A) 16 B) 14 C) 30 D) 34 E) 24

Causa x Circunstancia = efecto.

Obreros x días = Obra

$$\underbrace{18(20)}_{\text{Obra completa}} = \underbrace{18(8)}_{\text{Primera parte}} + \underbrace{10(6)}_{\text{Segunda parte}} + \underbrace{(10+x)6}_{\text{Parte final}}$$

$x = 16 //$

Obreros que trabajaron $= 18 + 16 = 34 //$

7. Si 70 vacas podrían comer la hierba de un campo en 24 días y 30 vacas en 60 días. Si la hierba crecer diariamente en forma constante, entonces en 96 días el número de vacas que se comerán toda la hierba es:

A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 22

8. Diez obreros planificaron hacer una obra en 16 días, pero al finalizar el cuarto día, 2 obreros renunciaron y en su reemplazo se contrataron a 2 obreros de doble eficiencias que los renunciantes. ¿Con cuántos días de anticipación se entregó la obra?

A) 2 B) 4 C) 1 D) 3 E) 5

Obra = obreros x días

$$10(16) = 10(4) + [8 + 2(2)]x$$

$$10(16-4) = 12x$$

$$10 = x$$

Se trabajó (4 + 10) días

⇒ Se terminó la obra 2 días antes.

9. En 10 días se terminó un trabajo. Comenzó con 7 obreros que hicieron 350 m, luego con ayuda de 5 obreros más hicieron los 400 m restantes. Entonces los días que trabajaron los 7 obreros, es:

A) 9 B) 7 C) 5 D) 3 E) 6

10. En un pastizal, un buey atado al extremo de una cuerda de 4 m de longitud, tarda 4 días en comer todo el pasto alrededor suyo. Si la cuerda es aumentada en 2 m más, la cantidad de días que tardará para comer todo el pasto a su alrededor es:

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

CLAVES: 1E, 2D, 3C, 4E, 5A, 6D, 7D, 8A, 9E, 10C