MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

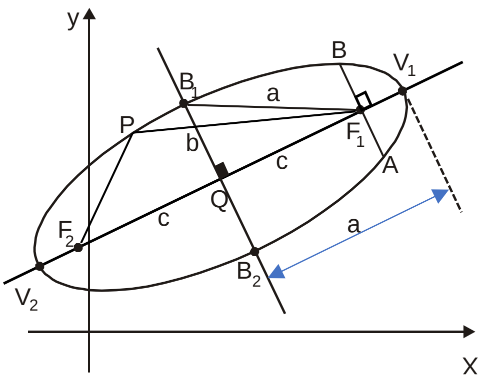
Competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

Temas: Geometría Analítica: Ecuación de la elipse.

LA ELIPSE

Definición: Es el lugar geométrico de todos los puntos contenidos en un mismo plano tal que las sumas de las distancias de cualquier punto de la elipse a 2 puntos fijos es constante e igual al diámetro mayor; los puntos fijos se denominan focos. $d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 2a$.

(2a): Es constante.



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Donde se cumple:

a) F_1 ; F_2 Focos de la elipse

b) $d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 2a$

c) $\overline{F_1F_2} = 2c$ Distancia focal

d) V_1 ; V_2 : Vértices $\rightarrow \overline{V_1V_2}$ = eje mayor
Eje mayor = 2a

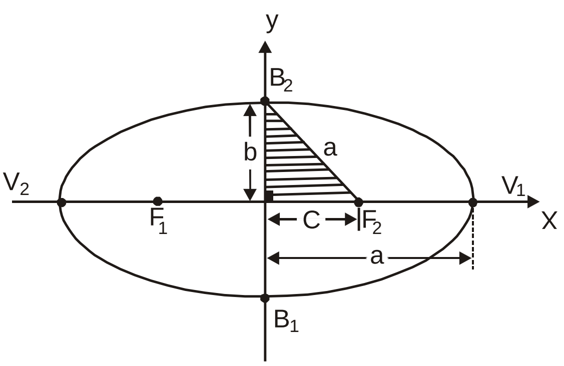
e) $AB = \dfrac{2b^2}{a}$: Lado recto

f) Q = Centro

g) $\overline{B_1B_2} = 2b$ Eje menor

Casos Generales de la Elipse:

I) Elipse Horizontal:

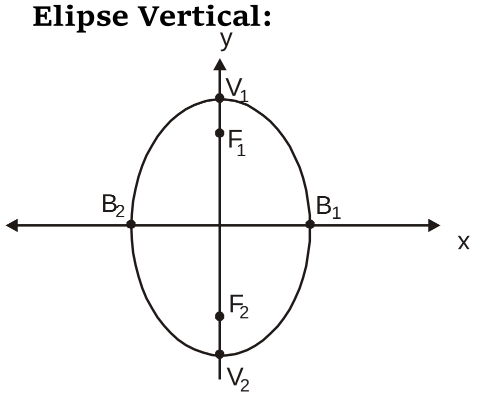


Esta es la ecuación cuando el centro de la elipse está en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el centro fuera (h ; k) , entonces la ecuación es: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

II) Elipse Vertical:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{donde} \quad a>b$$

Cuando el centro fuera (h ; k) la ecuación es: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ donde $a > b$

Recuerda: Que cuando el denominador de x^2 ó $(x – h)^2$ es mayor que el que el denominador de y^2 ó $(y – k)^2$ entonces la Elipse es horizontal; y en el caso contrario es vertical.

Ej.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \text{Elipse horizontal} \qquad\qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \Rightarrow \text{Elipse vertical}$$

Excentricidad de la elipse:

Es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse. Y es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

$$e=\frac{c}{a} \qquad \text{donde } c \le a \quad \text{y} \quad 0 \le e \le 1$$

PROBLEMAS SOBRE ECUACIÓN DE LA ELIPSE

1. Los vertices de una elipse son (-5; 3) y (13; 3) y los focos (-2; 3) y (10; 3).La longitud del lado recto, es:

   A)12 B)10 C) 8√3

2. La excentricidad de una elipse de vértices (1,-6) y (9,-6) y de lado recto 9/2, es:

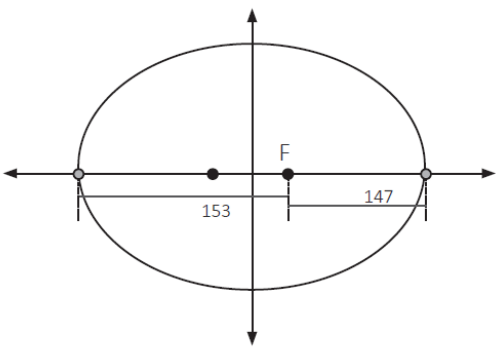
   A) √7/4 B)1/2 C) √3/5

3. Las coordenadas del punto de intersección de la elipse: $9x^2+25y^2=225$ y la parábola $9x^2=125(y-1)$, son:

   A) $\left(\frac{-7\sqrt{5}}{3};\right)$ y $\left(\frac{7\sqrt{5}}{3};2\right)$ B) $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{3};2\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{5}}{3};\right)$ C) $\left(\frac{-5\sqrt{5}}{3};2\right)$ y $\left(\frac{5\sqrt{5}}{3};2\right)$

4. ¿Cuál de las tareas es de mayor demanda cognitiva?
   a) En una elipse con centro en (-2; 3), uno de sus focos es (6;3) halle el valor de n del vértice (n;3), de modo que su excentricidad sea 0,8 y luego escriba la ecuación respectiva.
   b) En la ecuación de la elipse $\frac{(x+2)^2}{100}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$ halla las coordenadas del centro y la medida de su excentricidad.
   c) Escriba la ecuación de una elipse con centro en (-2; 3), donde el eje mayor mide 20 u, y el eje menor 12, sabiendo que el eje focal es paralelo al eje x.

5. Durante una sesión de aprendizaje los estudiantes resuelven problemas que involucran elipses. A continuación, se muestra una parte de la resolución que realizó una estudiante.



El eje mayor mide $2a$ y la distancia entre los focos es $2c$. Luego:

$a + c = 153$

$a - c = 147$

Entonces $a = 150$ y $c = 3$

Respuesta: La distancia entre el centro de la elipse y uno de sus focos es 3 unidades.

Tomando en cuenta que la estudiante resolvió de forma adecuada el problema, ¿qué se puede afirmar de su proceso de resolución?

a) Consideró una elipse que tiene como uno de sus focos el punto (a - c; 0).
b) Consideró una elipse con un eje mayor que tiene como uno de sus extremos el punto (-a; 0).
c) Consideró una elipse con un eje menor que tiene como uno de sus extremos el punto (-c; 0).