MATEMÁTICA

PROBABILIDADES: TEORÍA Y PRÁCTICA - CASUÍSTICA

Situación de aprendizaje

Expresiones cotidianas relacionadas con probabilidades

Casi siempre vivimos en situaciones de incertidumbre, lo cual nos lleva permanentemente a realizar aseveraciones o preguntas como por ejemplo:

- Esta semana ha llovido casi todos los días, por lo tanto, es **probable** que mañana sea un día lluvioso.
- ¿Es **posible** que el congreso de la República declare la vacancia Presidencial?
- ¿Es **posible** que el Presidente de la República cierre al Congreso?
- ¿Qué **probabilidad** hay de que apruebe el examen de matemática?
- ¿Qué tan **probable** es que en este año 2022 se registre un terremoto de gran intensidad en algún lugar del Perú?
- Tengo la **certeza** de llegar a tiempo al colegio si uso un automóvil en lugar de un bus.
- Si compro un boleto de la tinka, ¿qué tanto de **suerte** tendré para obtener el premio mayor de la lotería?

Como se puede apreciar, siempre usamos las palabras “posible”, “probabilidad”, “probable”, “certeza” y “suerte” en nuestras conversaciones cotidianas.

- ✓ **¿Qué concepto matemático describen las palabras “posible”, “probabilidad”, “probable”, “certeza” y “suerte”?**
- ✓ **¿Es posible medir la posibilidad de que ocurra o no ocurra un determinado evento o suceso?**
- ✓ **¿Para qué serviría una medición probabilística?**

CONCEPTOS BÁSICOS

- Un **experimento** es el proceso por el cual se obtiene un resultado.
- Un **experimento aleatorio** es aquel en el cual existe incertidumbre acerca del suceso que pueda ocurrir.
- El **espacio muestral** es el conjunto de todas las posibilidades que tiene de ocurrir un experimento aleatorio.
- Un **evento** o **suceso** es un resultado que se espera que ocurra en un experimento. Esto constituye un subconjunto del espacio muestral.

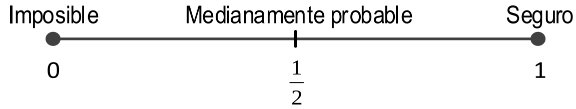

Girolamo Cardano (1501-1576)

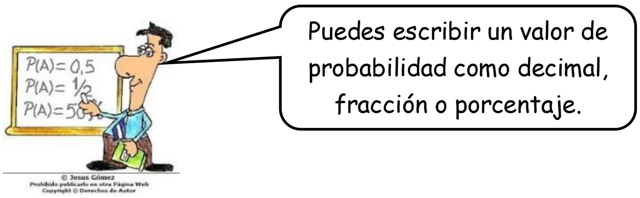
Girolamo Cardano escribió el libro de los juegos de azar, siendo el primer libro sobre probabilidades. Cardano fue un astrónomo, filósofo, médico, matemático y apostador, de origen italiano. Su libro contenía técnicas para hacer trampa en un juego y saber cómo atrapar a quienes hacen trampas.

Algunos ejemplos de experimentos aleatorios:

- ✓ Arrojar un dado 3 veces
- ✓ Lanzar una moneda
- ✓ Tomar dos cartas de una baraja de 52 cartas.
- ✓ Registrar el número de automóviles que pasan por la entrada de un colegio en un periodo de una hora.

Podemos expresar las posibilidades de que ocurra un suceso usando un número comprendido entre cero y uno. En esta escala, el cero (0) representa ala suceso imposible y el uno (1) representa a un suceso que ocurrirá con certeza. Esta medida es la probabilidad de que ocurra el suceso.

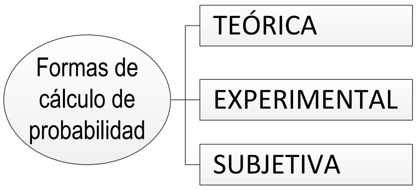


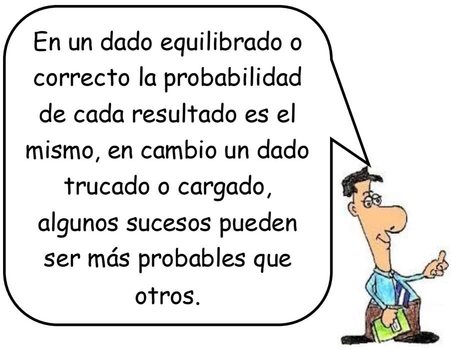


La probabilidad de que ocurra un suceso A, lo podemos representar como $\mathrm{P(A)}$, la cual estará comprendida en un intervalo real desde cero (0) hasta uno (1), así:

$$\boxed{0 \le \mathrm{P(A)} \le 1}$$

Formas de cálculo de la probabilidad de un suceso:





Probabilidad teórica

Un dado equilibrado tiene 6 caras numeradas, donde cada una de ellas tiene la misma probabilidad de ocurrir.

La lista de todos los resultados posibles es denominada **espacio muestral** U, definido como el conjunto U = {1; 2; 3; 4; 5 y 6} su cardinal es n(U) = 6 muestra que tiene seis elementos.

Sea el **suceso** A definido como "**el número obtenido es 6**".

Este suceso es un subconjunto del espacio muestral: A = {6}, donde su cardinal es n(A) = 1.

Por lo tanto la probabilidad de obtener un 6 al lanzar un dado equilibrado o correcto estará determinado por el siguiente cociente:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(U)}} = \frac{1}{6} = 0{,}1666...$$

Por lo tanto: la **probabilidad teórica** de un suceso A es:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)} \leftarrow \text{número de casos favorables}}{\mathrm{n(U)} \leftarrow \text{total de casos posibles}}$$

Si la probabilidad de un suceso es P, en n experimentos se espera que el suceso ocurra $\mathrm{n \times P}$ veces.

Ejemplo 1: Se lanza un dado equilibrado de 20 caras numeradas del 1 al 20. Un suceso A se define como "el número obtenido es un múltiplo de 4".

a) Determine $\mathrm{P(A)}$

b) El dado se lanza 100 veces ¿Cuántas veces espera obtener un múltiplo de 4?

Probabilidad experimental (empírica)

Muchas veces los resultados no resultan equiprobables, pero se puede usar un experimento para estimar las probabilidades. Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que una determinada pieza que se está produciendo en una fábrica sea defectuosa, deberíamos evaluar algunas de ellas.

Si la primera pieza que evaluamos resulta defectuosa, podríamos concluir que todas las piezas son defectuosas. Sin embargo este puede no ser el caso. Si la segunda pieza no es defectuosa, podríamos concluir entonces que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es ½, dado que la mitad de todas las piezas evaluadas hasta el momento fueron defectuosas.

Continuando este proceso una cantidad de veces y calculando la razón:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Número de piezas defectuosas}}{\text{Número de piezas evaluadas}}$$

Esta es la **frecuencia relativa** de que una pieza resulte defectuosa.

Ejemplo 2

Los colores de los automóviles que pasan por la entrada del colegio durante una mañana se dan en la tabla siguiente:

a) Estime la probabilidad de que el próximo automóvil que pase por la entrada del colegio sea rojo.

b) A la mañana siguiente pasaron 350 automóviles por la entrada del colegio. Estime el número de automóviles rojos en esta mañana.

Color	**Frecuencia**
Rojo	45
Negro	16
Amarillo	2
Gris	14
Blanco	17
Marrón	23
Otros colores	21
Total	**138**

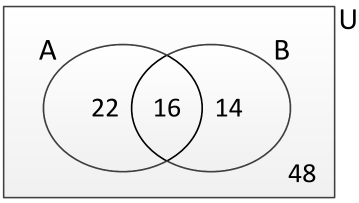
Probabilidad subjetiva

No siempre es posible repetir un experimento un gran número de veces. En estos casos, podemos estimar la probabilidad de un suceso basándonos en un juicio subjetivo, la experiencia, información o una creencia.

Por ejemplo los equipos de fútbol de Alianza Lima y Universitario se enfrentarán en la final de la copa Perú 2017. ¿Cuál es la probabilidad de que Alianza Lima gane el torneo?

Se podrían considerar partidos anteriores entre los dos equipos, como así también los últimos partidos de cada equipo y cuál fue el desempeño de ambos en las condiciones meteorológicas en las que van a jugar, pero finalmente tendremos que "adivinar".

Probabilidad condicionada



En el diagrama de Venn adjunto se muestra a los estudiantes que practican tiro con arco y bádminton.

Si sabemos que un estudiante en particular practica bádminton, ¿cómo afecta a la probabilidad de que también practica tiro con arco?

En total, 30 estudiantes practican bádminton, 16 de estos practican tiro con arco.

Escribimos la probabilidad de que un estudiante practique tiro con arco sabiendo que practica bádminton como $P(A|B)$. Calculamos esta probabilidad así:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{16}{100}}{\frac{30}{100}}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

En general, para dos sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrió B puede hallarse usando:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Esto se conoce como **probabilidad condicionada**, dado que el resultado de A **depende** del resultado de B.

Si reordenamos la fórmula nos da: $P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)$

Si A y B son **sucesos independientes**:

$P(A|B)=P(A),\quad P(B|A)=P(B)$

$P(A|B')=P(A),\quad P(B|A')=P(B)$

Para **eventos o sucesos independientes** A y B, la probabilidad de que A ocurra, dado que B ha ocurrido será igual a la probabilidad de que A ocurra, ya que A no está afectada por la ocurrencia de B.

PROBLEMAS DE MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

1. **¿Cuál de los siguientes eventos tiene la mayor probabilidad de ocurrencia?**
   a) Lanzar simultáneamente dos dados no cargados y que en uno se obtenga un número par y en el otro, un número impar.
   b) Lanzar simultáneamente dos dados no cargados y que el producto de las cantidades obtenidas sea a lo más 10.
   c) Lanzar simultáneamente dos dados no cargados y que la suma de las cantidades obtenidas sea igual o mayor que 8.

2. **Manuel tiene una caja con 4 bolas azules y 5 bolas rojas. Todas las bolas son del mismo tamaño, masa y textura.**
   Si extrae una bola de la caja y, sin devolverla, luego extrae otra, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) La probabilidad de que haya extraído una bola azul y una bola roja es $\frac{9}{20}$.
   b) La probabilidad de que haya extraído dos bolas azules es $\frac{12}{25}$.
   c) La probabilidad de que haya extraído dos bolas rojas es $\frac{5}{18}$

3. **La capacidad máxima del ascensor de un hotel es de 4 personas. En un determinado momento Alex, Beatriz, Carla y Diana ingresan al ascensor en el primer piso y se dirigen a sus habitaciones ubicadas en el quinto y décimo piso del edificio (al menos una de estas personas debe bajar en uno de esos dos pisos). En ese momento Erika y Fidel quieren entrar al ascensor cuando este se detenga en el quinto piso y puede ingresar uno de ellos o ambos dependiendo del espacio que haya.**
   ¿Cuál es la probabilidad de que ambos, Erika y Fidel, puedan subir al ascensor cuando se detenga en el quinto piso?
   a) $\frac{5}{7}$
   b) $\frac{2}{3}$
   c) $\frac{3}{7}$

4. **Una docente mostró a los estudiantes una ruleta circular no trucada, en posición vertical, y dividida equitativamente en 4 regiones. Cada región ha sido etiquetada con una letra: A, B, C y D. Luego, preguntó: "Si giramos la ruleta con fuerza, ¿podremos saber en qué letra se detendrá?".**
   Un estudiante respondió: "Creo que sí. Por ejemplo, si la ruleta empieza a girar cuando la flecha señala la letra A, es más probable que, cuando se detenga, la flecha también señale la letra A".
   ¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error en el que incurre el estudiante?
   a) Considerar que la probabilidad de obtener A es mayor que la probabilidad de obtener B, C o D.
   b) Considerar que obtener A, B, C o D cada vez que se gira la ruleta son eventos dependientes.
   c) Considerar que la letra de inicio es una condición que influye en la probabilidad de obtener A, B, C o D al girar la ruleta.

5. **Con el propósito de que sus estudiantes afiancen su comprensión sobre la aleatoriedad, un docente les pide que propongan situaciones aleatorias.**
   Uno de los estudiantes propone: "El lanzamiento de un dado".

   Otro estudiante comenta: "El lanzamiento de una moneda, también".

   Después, el docente pregunta: "¿Cuándo un experimento es aleatorio?".

   Un tercer estudiante responde: "Un experimento es aleatorio cuando no se puede predecir el resultado y cuando todos los sucesos tienen la misma probabilidad de salir".

   ¿Cuál de las siguientes preguntas es pertinente para favorecer la generación del conflicto cognitivo en este estudiante?

   a) Si giras una ruleta, no trucada, dividida en 8 secciones equitativamente con colores diferentes en cada sección, ¿todos los colores tienen la misma probabilidad de salir? ¿Es un experimento aleatorio? Entonces, ¿cuándo no lo sería? ¿Por qué?
   b) Si tienes una caja con 3 bolas rojas y 6 bolas azules, ¿extraer, sin mirar, una bola roja o una azul tendrá la misma probabilidad de salir? ¿Se podrá predecir el color de la bola? Entonces, ¿este experimento será aleatorio?
   c) ¿Estás seguro de que esa es la definición de experimento aleatorio? ¿No será que estás restringiendo la definición de aleatoriedad solo para sucesos que tienen la misma probabilidad de salir?

6. **Una docente propone el siguiente problema a sus estudiantes:**

   Si se lanzan dos dados no trucados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 en cada uno de los dados?

   Un estudiante interviene y se suscita el siguiente diálogo:

   Estudiante: "Maestra, dígame, ¿la probabilidad de obtener 4, al lanzar un dado, es 1/6?".

   Docente: "Así es. Si lanzas un solo dado, la probabilidad de obtener 4 es igual a 1/6; porque solo hay 1 caso favorable de 6 casos posibles".

   Estudiante: "Entonces, la probabilidad de obtener 4 en ambos dados será 2/6".

   Con respecto a la última afirmación, ¿cuál de las siguientes alternativas corresponde al error en el que incurre el estudiante?

   a) Considerar que la probabilidad de obtener 4 en cada dado se genera a partir de una relación de proporcionalidad.
   b) Considerar que la ocurrencia de que se obtenga 4 en un dado es independiente de que se obtenga 4 en el otro.
   c) Considerar la probabilidad de obtener 4 en uno de los dados sabiendo que se obtuvo 4 en el otro.

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 4 y 5.

7. **En una caja vacía se han colocado 4 bolas blancas y 3 bolas negras, todas del mismo tamaño, peso y textura.**
   ¿Cuál de las siguientes acciones se debe realizar para que la probabilidad de extraer una bola negra de la caja al azar sea 3/5?
   a) Agregar a la caja una bola blanca.
   b) Retirar de la caja dos bolas blancas.
   c) Retirar de la caja una bola de cada color.

8. **Al extraer dos bolas de la caja al azar, una a una y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras?**
   a) $\frac{1}{7}$
   b) $\frac{2}{7}$
   c) $\frac{6}{7}$

9. **Una docente tiene como propósito que sus estudiantes afiancen su comprensión de la probabilidad condicional. Para ello, llevó al aula, como material de trabajo, una baraja de 52 cartas, en la cual cada palo de la baraja (trébol, espada, corazón y diamante) está conformado por 13 cartas. Utilizando este material, ¿cuál de las siguientes situaciones podría proponer la docente para que los estudiantes hagan uso de la probabilidad condicional?**
   a) Se han colocado 52 cartas de la baraja sobre una mesa, mezcladas y apiladas. Si se sabe que la primera carta es un número par, calculen la probabilidad de que sea 2.
   b) Se han colocado 13 cartas de un mismo palo de la baraja sobre una mesa, mezcladas y apiladas. Calculen la probabilidad de que la primera carta corresponda a un número impar.
   c) Se han colocado 2 cartas de espadas y 3 de corazones mezcladas y apiladas sobre una mesa. Al tomar una carta, esta es de corazones. Luego, se devuelve y se vuelve a mezclar. Calculen la probabilidad de que, al tomar nuevamente una carta, esta sea de espadas.

10. **En un censo realizado en una comunidad, se encontró que la quinta parte de las personas que pertenecen a la población económicamente activa (PEA), no cuenta con estudios superiores y no trabaja. El 35% no cuenta con estudios superiores. Además, 1 de cada 4 personas tiene estudios superiores y trabaja.**
    Una empresa realizó una convocatoria a miembros de esta comunidad para una entrevista de trabajo. A esta entrevista, se presentaron todas las personas que no trabajan y pertenecen a la PEA. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer entrevistado no cuente con estudios superiores?
    a) $\frac{1}{5}$
    b) $\frac{1}{3}$
    c) $\frac{7}{20}$

11. Un docente propone a los estudiantes desarrollar una actividad que comprende las siguientes tareas:

1. Si lanzas una moneda no cargada, ¿cuánta es la probabilidad de obtener cara?

2. Lanza la moneda 2, 10, 50 y 100 veces. Registra los resultados en esta tabla.

Cantidad de lanzamientos	Frecuencia de caras	Frecuencia de sellos	Frecuencia relativa de caras	Frecuencia relativa de sellos
2				
10				
50				
100				

3. ¿Algún valor de la tabla coincide con tu respuesta a la probabilidad de obtener cara?

¿Cuál es el <u>principal</u> propósito de aprendizaje de esta actividad?

a) Motivar a los estudiantes para el aprendizaje de las probabilidades mediante una actividad experimental.
b) Reconocer que la frecuencia relativa para un número creciente de intentos se aproxima más a la probabilidad clásica.
c) Calcular experimentalmente las probabilidades de diferentes sucesos y organizar la información en tablas de frecuencia.

12. Una docente planteó el siguiente problema a los estudiantes de segundo grado:

Se tienen tres dados no cargados de seis caras. Si se lanzan los tres dados simultáneamente, ¿cuál de los siguientes sucesos es más probable que ocurra?

S1: Obtener el número 4, el 5 y el 6.

S2: Obtener en dos dados el número 4 y en el otro, el número 5.

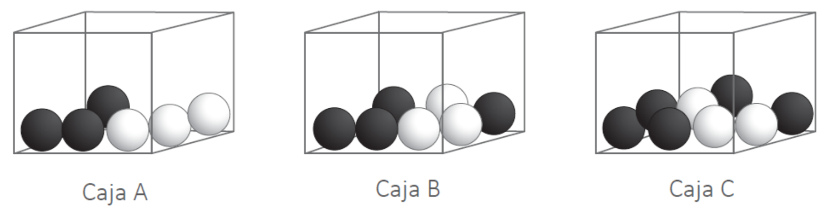
S3: Obtener el número 4 en los tres dados.

Un estudiante respondió así: "Los tres sucesos son igualmente probables porque cada uno tiene un solo caso favorable".
¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se evidencia en la respuesta del estudiante?

a) Asume que cualquiera de las caras de un dado tiene la misma probabilidad de salir.
b) Obvia considerar todas las posibilidades que corresponden a cada suceso.
c) Considera que los tres sucesos tienen el mismo espacio muestral.

13. Una docente tiene como propósito que los estudiantes calculen y comparen la probabilidad de diferentes sucesos. Para ello, plantea la siguiente tarea:

Tres cajas contienen bolas negras y blancas. Si se extrae al azar una bola de cada caja, ¿en qué caso hay mayor probabilidad de obtener una bola blanca al primer intento?



Felipe, un estudiante, respondió: "En los tres casos hay igual probabilidad porque en todas las cajas hay exactamente 3 bolas blancas".
¿Cuál de las siguientes acciones es <u>más</u> pertinente para brindar una adecuada retroalimentación al estudiante, de modo que reflexione acerca de su concepción errónea?

a) Explicarle que la probabilidad se puede representar como una fracción en la que el numerador expresa la cantidad de casos a favor y el denominador, la cantidad total de posibles resultados de un experimento. Luego, pedirle que calcule la probabilidad asociada a cada una de las tres cajas y que determine cuál de las tres fracciones es la mayor.
b) Pedirle que cuente las bolas blancas, las bolas negras y la cantidad total de bolas en cada caja. Luego, preguntarle: “En las cajas, ¿hay la misma cantidad de bolas blancas?, ¿hay la misma cantidad total de bolas?, ¿será lo mismo tener 3 opciones de 6, que 3 de 7 o tener 3 de 8? ¿Esto afectará el valor de la probabilidad en cada caso?, ¿por qué?”.
c) Preguntarle lo siguiente: “¿Cómo se calcula la probabilidad en un experimento?, ¿de cuántas formas diferentes se puede representar una probabilidad?, ¿conviene usar la representación porcentual para realizar las comparaciones?, ¿por qué?”.

14. En un taller textil, se producen 1000 camisas y 4000 polos diariamente. Mediante un control de calidad periódico de dichas prendas, se ha establecido que el 3 % de las camisas y el 2 % de los polos presentan fallas en su costura.
Con respecto a la situación referida, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es <u>necesariamente</u> correcta?

a) Si de la producción diaria se toman al azar 100 polos, exactamente 2 polos presentarán fallas en su costura.
b) Si del total de camisas producidas en el día se coge una al azar, la probabilidad de que esta tenga fallas en su costura es 0,03.
c) Si se toma al azar una prenda, ya sea una camisa o un polo, existe una probabilidad del 5 % que presente alguna falla en su costura.

15. Una docente presenta a los estudiantes la siguiente situación:

Dentro de una urna hay tres pelotas: dos de color rojo y una de color blanco; todas ellas son de igual tamaño, textura y masa.
Cecilia extrae, al azar y de manera consecutiva, dos pelotas, sin devolver ninguna de ellas a la urna.

A partir de esta situación, tres estudiantes realizaron afirmaciones. ¿Cuál de los estudiantes realizó una afirmación correcta?

a) Katherine: “Después de sacar dos pelotas, la probabilidad de que en la urna quede la pelota blanca es el doble de la probabilidad de que quede una pelota roja”.
b) Laura: “La probabilidad de sacar solo pelotas rojas en las dos extracciones, resulta ser mayor que la probabilidad de sacar una pelota blanca en la primera extracción”.
c) Mery: “La probabilidad de obtener una pelota roja en la primera extracción es igual a la probabilidad de obtener una pelota roja en la segunda, independientemente de lo obtenido en la primera”.