MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

Temas: Miscelánea de problemas de competencias 1 y 2.

1. Una docente planteó a los estudiantes resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y - x = 7 \\ 2x + 8 = 6y \end{cases}$$

Miguel, un estudiante, efectuó el siguiente desarrollo:

Método de sustitución

Como $3y - x = 7$, entonces

$$3y - 7 = x$$

Reemplazando x en $2x + 8 = 6y$

$$2(3y - 7) + 8 = 6y$$
$$6y - 14 + 8 = 6y$$
$$6y - 6y = 14 - 8$$
$$0 = 6$$

Solución: $x = 0;\ y = 6$

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para que Miguel reflexione sobre su error?

a) Preguntarle: "¿Cuántas variables tiene el sistema? ¿Se aplicaron correctamente las propiedades de las ecuaciones?". Luego, indicarle que copie su resolución en la pizarra para que, colaborativamente, sus compañeros participen en la resolución del sistema.
b) Preguntarle: "¿El método de sustitución ha sido bien aplicado? ¿Has verificado las soluciones propuestas?". Luego, indicarle que, si los valores hallados no verifican las igualdades, puede aplicar otro método de solución al sistema propuesto.
c) Preguntarle: "¿Has verificado tu solución? ¿Todos los sistemas de ecuaciones tienen una única solución? ¿Puede haber sistemas con infinitas soluciones? ¿Habrá algún sistema que no tiene solución? ¿Cómo lo reconocerías?".

2. El propósito de una docente es favorecer que los estudiantes comprendan los productos notables. Para esto, ella debe diseñar una actividad inicial.
¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es más pertinente para lograr dicho propósito?

a) Pedir que construyan las siguientes piezas de cartulina: una pieza cuadrada cuyo lado sea a; 4 piezas rectangulares de lados a y 1 unidad, respectivamente; y 4 piezas cuadradas de 1 unidad de lado. Luego, pedir que con estas piezas formen un cuadrado, para lo cual deben colocar las 4 piezas rectangulares alrededor de la pieza cuadrada de lado a y, en las esquinas, poner las piezas cuadradas de lado 1 unidad. Finalmente, decir que la suma de las áreas de las 9 piezas utilizadas (a2 + 4a + 4) es igual al resultado de (a + 2)2.
b) Explicar el proceso de resolución de un binomio al cuadrado, de modo que aprendan que el resultado se obtiene de elevar el primer término al cuadrado, sumar el doble del producto del primer término por el segundo y sumar el segundo término al cuadrado. Luego, entregarles una ficha para que efectúen el cuadrado de otros binomios. Finalmente, verificar si desarrollaron correctamente los binomios propuestos.

c) Entregar 4 piezas de cartulina: 2 de forma cuadrada, una de lado a y otra de lado b, y 2 piezas rectangulares de lados a y b unidades, respectivamente. Luego, pedir que formen un cuadrado de lado (a + b) con las 4 piezas entregadas. Finalmente, solicitar que expresen el área del cuadrado de lado (a + b), en función de la suma de las áreas de las 4 piezas entregadas.

3. ¿Cuál de los siguientes procedimientos **NO** presenta errores al operar con expresiones algebraicas?

a) Si $a_h = 7(h + 1) + 3$, entonces $a_{h+1} = 7(h + 1 + 1) + 3$

$$\Rightarrow a_{h+1} = 7(h + 2) + 3$$

$$\Rightarrow a_{h+1} = 7h + 5$$

b) Al resolver la ecuación $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x-1}{2} - \frac{7}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x-1}{2} = 4 - \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

se concluye que tiene infinitas soluciones.

c) Al desarrollar $F = \frac{1}{3}(m + 1)(4m + 3)$, resulta lo siguiente:

$$F = \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}(4m + 3)$$

$$F = \frac{1}{3}m + \frac{4}{3}m + 1$$

$$F = \frac{5}{3}m + 1$$

4. Con el propósito de promover la comprensión de los porcentajes, un docente presenta a los estudiantes el siguiente problema:

En nuestro planeta, hay alrededor de 1400 millones de kilómetros cúbicos de agua. De estos, el 2,5 % es agua dulce. A su vez, solo el 1 % del agua dulce está en las cuencas hidrográficas en forma de arroyos y ríos. ¿Cuántos kilómetros cúbicos de agua dulce hay en las cuencas hidrográficas? Explica tu procedimiento.

Un estudiante explica su procedimiento de resolución:

Sumamos los porcentajes: 2,5 % + 1 % = 3,5 %
Entonces, el agua dulce que hay en las cuencas hidrográficas es:
3,5 % × 1400 millones de kilómetros cúbicos = 49 millones de kilómetros cúbicos

¿Cuál de las siguientes acciones de retroalimentación es <u>más</u> pertinente para que el estudiante reflexione sobre su error?

a) Sugerirle que primero debe determinar la cantidad de agua dulce que hay en el planeta, efectuando: 2,5 % × 1400 millones. Luego, preguntarle por el resultado del 1 % de esa cantidad y qué se concluye.
b) Proponerle que encuentre la cantidad de agua dulce que hay en el planeta y preguntarle a qué cantidad se aplica el 1 % indicado. Luego, preguntarle si ambos porcentajes se aplican a la misma cantidad y si está bien sumarlos.
c) Pedirle que asuma que la cantidad total de agua en el planeta es 100 kilómetros cúbicos y que halle la cantidad de agua dulce. Luego, usando la cantidad hallada, pedirle que obtenga el 1 % de dicha cantidad y que revise su respuesta.

5. Durante la preparación de una sesión de aprendizaje, un docente decidió utilizar los resultados de una encuesta hecha a 25 estudiantes de primer grado acerca de la cantidad de frutas que diariamente consume cada uno.
La siguiente tabla presenta los resultados de la encuesta.

Cantidad de frutas consumidas	Cantidad de estudiantes
0	6
1	8
2	5
3	4
4	1
5	1

A partir de los resultados de esta encuesta, el docente quiere formular una pregunta para recoger información acerca del indicador de evaluación “Emplea estrategias de cálculo para resolver problemas que involucran operaciones con expresiones porcentuales”.

¿Cuál de las siguientes preguntas es **más** pertinente para recoger información de dicho indicador?

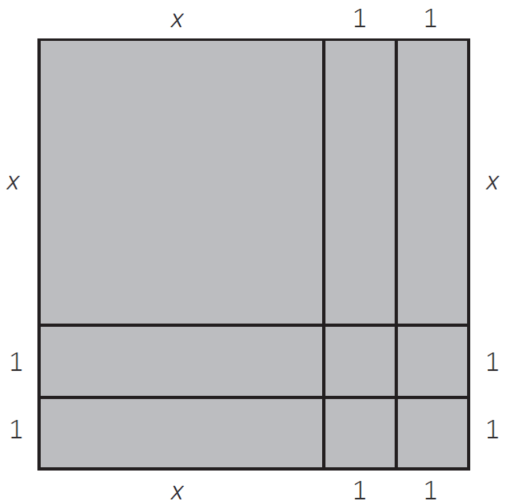
a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes son los que comen a diario más de 3 frutas?
b) Con respecto de los que sí consumen frutas, ¿qué porcentaje constituye aquellos que comen a diario únicamente 1 fruta?
c) La cantidad de estudiantes que consumen a diario una o más frutas, ¿en cuántos puntos porcentuales supera a la cantidad que no la consumen?

6. Un docente tiene como propósito que los estudiantes resuelvan problemas que involucran propiedades de los números naturales. En ese marco, les presenta el siguiente problema:
Dos hermanos, Rosa y Julio, recibieron de sus padres una pista de carrera para autos de juguete. Esta pista es cerrada y los carriles tienen la misma longitud. Al medir los tiempos, se obtuvo que el auto de Rosa demora 36 segundos en dar una vuelta y que el de Julio demora 42 segundos. Si los dos autos partieron en el mismo instante y en cada vuelta emplean los respectivos tiempos indicados, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que coincidan nuevamente en el punto de partida?
Tres estudiantes indicaron cómo resolver el problema. ¿Quién lo hizo de forma correcta?

a) Angélica dijo: "Como los autos demoran 36 segundos y 42 segundos, entonces el tiempo en que coincidan será aquel que contiene, a la vez, un número exacto de veces a dichos tiempos".
b) Beatriz dijo: "Para calcular el tiempo, colocamos a 36 y 42 encabezando dos columnas; luego, trazamos una línea vertical a la derecha y extraemos los factores comunes. Al multiplicarlos, tendremos el resultado".
c) César dijo: "No creo que vuelvan a coincidir en algún momento, ya que al dar una vuelta la diferencia de sus tiempos es 6 segundos; en dos vueltas, es 12 segundos y, así, siempre irán distanciándose en cada vuelta que den".

7. Con respecto al uso del lenguaje algebraico en la formulación simbólica de la regla de formación de sucesiones numéricas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
a) Facilita examinar regularidades en una sucesión numérica.
b) Garantiza el descubrimiento de la regla de formación.
c) Evidencia un mayor nivel de generalización.

8. Durante el desarrollo de una actividad, un docente entregó a los estudiantes 9 piezas de un rompecabezas y les pidió que armaran un cuadrado. Una vez realizado, él asignó las medidas de los lados de las piezas como se aprecia en la siguiente figura:



Luego, el docente les solicitó a los estudiantes lo siguiente:

- Calculen las áreas de cada una de las piezas y súmenlas para determinar la expresión que representa el área total de la figura formada.
- Determinen la medida del lado del cuadrado formado y con este valor expresen el área de dicho cuadrado.
- Respondan: ¿Qué se puede afirmar de ambas expresiones?

¿Cuál es el propósito principal de la actividad?
a) Que los estudiantes resuelvan operaciones multiplicativas con expresiones algebraicas.
b) Que los estudiantes establezcan relaciones entre las distintas expresiones algebraicas del área de una figura geométrica.
c) Que los estudiantes desarrollen su habilidad de visualización geométrica estableciendo relaciones entre las partes y el todo.

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 9 y 10.

En una IE, algunos estudiantes deciden emprender un negocio de dulces de chocolate con relleno de diferentes sabores, los cuales serán vendidos en cajas. Los estudiantes se distribuyen para realizar una de las siguientes labores: elaboración, empaquetado y venta de dulces.

9. Durante el primer mes de venta, Miguel y Noelia se encargaron de vender estos dulces en los colegios cercanos al suyo.
   A Miguel le entregaron 3/5 del total de cajas y a Noelia el resto. Miguel solo vendió la mitad de la cantidad de cajas que le dieron y Noelia, la cuarta parte.
   Si Noelia debe vender la misma cantidad de cajas que vendió Miguel, ¿qué fracción de lo que le queda a ella debe vender?

   a) $\frac{2}{3}$
   b) $\frac{1}{4}$
   c) $\frac{1}{5}$

10. Los dulces de chocolate son de forma esférica, cada uno mide 4 cm de diámetro y serán colocados en cajas cuyas medidas son 12 cm, 8 cm y 4 cm. Se desea saber qué cantidad de dulces como máximo caben en cada caja. Para ello, uno de los estudiantes realiza los siguientes cálculos:

    Volumen de la caja: $12 \times 8 \times 4 = 384 \text{cm}^3$

    Volumen de cada dulce: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = 33{,}5 \text{ cm}^3$

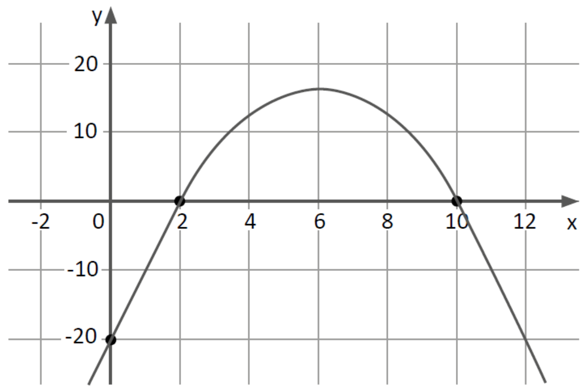
    $384 \div 33{,}5 = 11{,}46$

    Luego afirma: “Cada caja podrá contener como máximo 12 dulces de chocolate”.
    A partir del registro del estudiante, ¿cuál de las siguientes alternativas expresa el error en el que incurre el estudiante?

    a) Considerar que la cantidad de dulces en cada caja se determina al dividir el volumen de la caja entre el volumen de cada dulce.
    b) Considerar que la cantidad de dulces de chocolate se obtiene al aproximar el cociente al siguiente número entero.
    c) Considerar solo una cifra decimal en el divisor al realizar la división.

11. Un docente tiene como propósito evaluar el logro del siguiente desempeño: “Justifica si un gráfico corresponde a una función cuadrática dada”. Para ello selecciona la siguiente tarea:

¿El siguiente gráfico corresponde a la función f cuya expresión algebraica es $f(x) = -x^2 + 12x - 20$? ¿Por qué?



Para evaluar las respuestas de los estudiantes, el docente ha elaborado la siguiente rúbrica con las descripciones de los niveles Previo al inicio, En inicio, En proceso y Logrado.

Previo al inicio	En inicio	En proceso	Logrado
No reconoce que la gráfica corresponde a la función dada.	Reconoce que el gráfico sí corresponde a la función y expresa puntos explícitos de la gráfica.	Reconoce que el gráfico sí corresponde a la función y expresa puntos explícitos de la gráfica relacionándolos con la expresión algebraica de la función.	Reconoce que el gráfico sí corresponde a la función y expresa puntos explícitos de la gráfica, así como características propias de esta, estableciendo relaciones con la expresión algebraica de la función.

Un estudiante respondió lo siguiente: "Sí, porque como el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola se abre hacia abajo. Además, cuando x es 0, y vale -20; y cuando y es 0, x vale 2 o 10".

A partir de la rúbrica presentada, ¿cuál es el nivel de logro alcanzado por este estudiante?

a) En inicio
b) En Proceso
c) Logrado